App. mll.
41

App. mil. Graevenz
41 4°

App. mil. Graevenitz
41 4°

Henning Friedrichs,
des H. Römischen Reichs Grafen von Graeveniz rc. rc.
Sr. Königl. Majestät von Groß-Brittannien und Churfürstl. Durchl. zu Braunschweig-Lüneburg bestallten Capitain-Lieutenants beym Hochl. von Reedenschen Infanterie-Regiment,

# Akademische Abhandlung
von der
# Bahn der Geschüzkugeln,
nebst praktischen Tabellen und Regeln
## die Schußweiten zu finden.

Auf der Herzogl. Mecklenburgischen
Friedrichs-Universität zu Bützow
am 19 März 1764
in den gewöhnlichen Stunden von 9 bis 12 Uhr Vormittags
von der Academischen obersten Catheder,
auf welchen Denselben
Wenceslaus Johann Gustav Karsten,
der Weltweisheit Doctor und der Mathematik Professor
begleitet,
öffentlich vertheidiget.

Rostock,
gedruckt mit A. F. Rösens Schriften.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# Vorrede.

Die gegenwärtige Arbeit des Hochgräflichen Herrn Verfassers wird nicht allein alle Aufmerksamkeit bey den Kriegskundigen verdienen, die eine hinlängliche Fähigkeit besitzen, einen jeglichen Theil ihres Geschäftes nach seinem wahren Werth zu beurtheilen; sondern ich kan ihr auch, ohne dem Herrn Verfasser zu schmeicheln, den Beyfall der Gelehrten zum voraus prophezeihen. Alle geschickte und erfahrne Praktici in der Geschüzkunst wissen es, daß sie der Theorie in Absicht auf die Verbesserung des Geschüzes und der ganzen Einrichtung des Artilleriewesens schon sehr vieles zu danken haben. Und wenn sie gleich selbst mit den hohen Theorien nicht allemahl bekant sind, so nehmen sie doch solche Regeln von den Theoreticis gerne und willig an, die sie

durch die Erfahrung bewährt befinden. Die gelehrten Geometer werden mit Vergnügen eine Abhandlung lesen, worin eine Geometrisch-Mechanische Aufgabe, davon die theoretische Auflösung nunmehr schon seit einem halben Jahrhundert ihnen allein bekant gewesen ist, endlich einmahl zum Behuf der Ausübung vollständig entwickelt wird, nachdem einer von ihren grösten Kunstverständigen dazu den nechsten Weg gebahnet hat. Die Herrn le Seur und Jacquier schreiben davon in ihrer schönen Ausgabe der Principiorum des Hrn. Newtons in den Anm. zum 10. Satz des 2. Buchs, nachdem sie das wesentliche der Auflösungen derer Herrn Bernoulli, Hermann und Euler von unsrer Aufgabe vorgetragen haben, dieses. Ex quibus manifestum fit, verae trajectoriae descriptionem adeo perplexam esse, ut ex illa vix quidquam ad usus philosophicos aut mechanicos accommodatum possit deduci. Hr. Euler selbst, nachdem er in seiner unvergleichlichen Mechanik, im 107. Satz des 6. Cap. die Auflösung völlig geliefert hat, setzet hinzu: tametsi hic vera assignata est projectoria, maxime dolendum est, aequationem tam esse intricatam, ut vix quidquam ad usum practicum ex ea possit deduci. Eben das Urtheil fället dieser grosse Geometer davon in der III. Anm. zum 6. Satz des 2. Cap. der Robinschen Artillerie. Seine tiefe Einsicht, und ungemeine Stärke in der Integralrechnung, die ihn in so vielen andern Fällen zur Auflösung der verwickeltsten Differentialgleichungen geleitet hat, siegte endlich über alle diese Schwierigkeiten, und die schätzbare Frucht seiner Bemühungen war der Aufsatz in den Memoires de Berlin, worauf diese ganze Schrift gebauet ist. Der Hochgräfliche Hr. Verf. haben mich seit anderthalb Jahren der Ehre gewürdiget, meine mathematischen Vorlesungen zu besuchen, und überdem noch in besondern Stunden sich meines Unterrichts in den höhern Theilen der Theoretischen sowohl, als Praktischen

Mathema-

Mathematik zu bedienen. Das hochgeneigte Zutrauen gegen mich, und die vorzügliche Zufriedenheit, welche Hochdieselben darüber mir jederzeit bezeuget haben, verpflichtet mich zeitlebens zur unterthänigen Dankbarkeit. Es war im Anfange dieses Jahres, als wir mit einander uns über die Lehre von der Bahn der Geschüz-Kugeln in der Artillerie unterhielten. Und wie ich unter andern erzehlte, daß Hr. Euler in den Memoires de Berlin die Auflösung der Aufgabe nunmehro so weit gebracht, daß man sie in der Ausübung ohne Schwierigkeit anwenden könne, auch selbst einen Entwurf dazu gemacht habe, um die Liebhaber aufzumuntern, daß sie seine Vorschläge zum Nutzen der praktischen Artillerie ins Werk richten mögten; so waren der Hochgräfliche Herr Verfasser sogleich begierig, diese Arbeit zu übernehmen, besonders da uns nicht bekant war, daß sonst jemand die Sache etwa schon mögte unternommen haben. Das Geschäfte wurde auch von Ihnen sogleich angefangen. Inzwischen nahmen wir die Abrede, daß ich mich selbst beym Hrn. Euler deswegen erkundigen wollte, ob vielleicht schon jemand diesen Entwurf ins Werk gerichtet hätte; und ich habe von des Hrn. Eulers Güte, der mir die Ehre seines mir sehr schätzbaren Briefwechsels zuweilen gönnet, folgende Nachricht erhalten, wofür ich ihm den gehorsamsten Dank schuldig bin. Bald nachdem Hrn. Eulers Aufsatz in den Memoires de Berlin bekannt geworden war, fand sich in Berlin ein geschickter Artillerie-Officier, nahmens Jacobi, welcher nicht nur die vom Hrn. Euler vorgeschlagenen 18 Tabellen, sondern überdem noch 18 andre, und also zusammen 36 berechnete, und nachdem dieses geschehen war, der Akademie der Wissenschaften vorlegte. Hierauf zog er mit zu Felde, und war so unglücklich vor Olmütz erschossen zu werden. Was nachher aus diesen Tabellen geworden, hat Hr. Euler nicht erfahren. Es bleiben also der Herr Reichs-Graf von Graeveniz vermuthlich der

erste, der eine solche Arbeit durch den Druck bekant macht, ob sie gleich so vollständig noch nicht ist, wie die Arbeit des Hrn. Jacobi gewesen. Die höchstrühmliche Begierde des Herrn Reichsgrafen, zur Verbesserung der Geschüzkunst das Ihrige beyzutragen, leistet allen Liebhabern solcher Untersuchungen die sichere Gewähr, die in dieser Schrift geschehene Verheissung bald erfüllet zu sehen. Dem ungeachtet ist der Verlust der von dem Hrn. Jacobi berechneten Tabellen sehr zu bedauren, und es wäre zu wünschen, daß sie sich irgendwo wieder finden mögten. Ich habe die meisten von den Tabellen des Hrn. Reichsgrafen nachgerechnet, und richtig befunden, alle habe ich sie wegen Kürze der Zeit nicht ganz genau prüfen können. Sollte noch irgendwo ein Fehler stecken, so werden des Hrn. Reichsgrafen künftige Bemühungen ihn schon verbessern. Sonst habe ich keinen Antheil an dieser Schrift, einige Materialien ausgenommen, welche dem Hochgräflichen Herrn Verfasser zu dem praktischen Theil von mir sind vorgeschlagen, und übrigens von Ihnen selbst in Ordnung gebracht worden. Bützow, den 10ten März. 1764.

**W. J. G. Karsten.**

Vermichs=

# Vermischte Sätze
## zur Uebung zu vertheidigen.

I. Man beschuldiget die Rechtsgelehrsamkeit ohne Grund, wenn man behauptet, daß die Streitigkeiten seltener seyn würden, wenn man alle Rechtssachen nach dem Naturrecht entschiede. In vielen, ja fast in den allermeisten Fällen würde man ohne positive Gesetze gar nicht auskommen können. Wie würde man z. E. in Erbschaftssachen, bey Verträgen, in Fällen, wo man sich über das Eigenthumsrecht streitet, u. s. w. ohne der Entscheidung eines Richters auseinander kommen konnen? Und in dieser Absicht scheint Hobbes nicht ganz unrecht zu haben, wenn er den Stand der Natur für einen Stand immerwährender algemeiner Kriege ausgiebt. Diese würden bey Todesfällen ganz unvermeidlich seyn. Denn das Recht der Natur weis nichts von Testamenten und von der Erbfolge.

II. Soll das Recht der Natur eine Wissenschaft seyn von den algemeinen Gesetzen und Rechten der Menschen, davon der Grund einzig und allein in der menschlichen Natur liegt, ohne auf diesen oder jenen besondern Zustand zu sehen, worin der Mensch sich etwa befindet, so scheinet der Begrif des Eigenthums selbst im Rechte der Natur ein frembder Begrif zu seyn. Im Stande der Unschuld hätte man wohl von keinem Eigenthumsrecht etwas gewust.

III. Denn siehet man auf das ursprüngliche Eigenthumsrecht, wovon das erworbene abhängt, so ist es schwer eine strenge Folge aus blos philosophischen Gründen in der Regel zu finden: **Wer eine Sache, woran niemand ein Recht hat, sich in der Absicht anmaßet, daß sie die seinige seyn soll,** oder wie man in den Schulen redet, sie unter solchen Umständen sich anmaßet, womit sowohl die physische, als moralische Möglichkeit verbunden ist, **der ist davon Eigenthumsherr.**

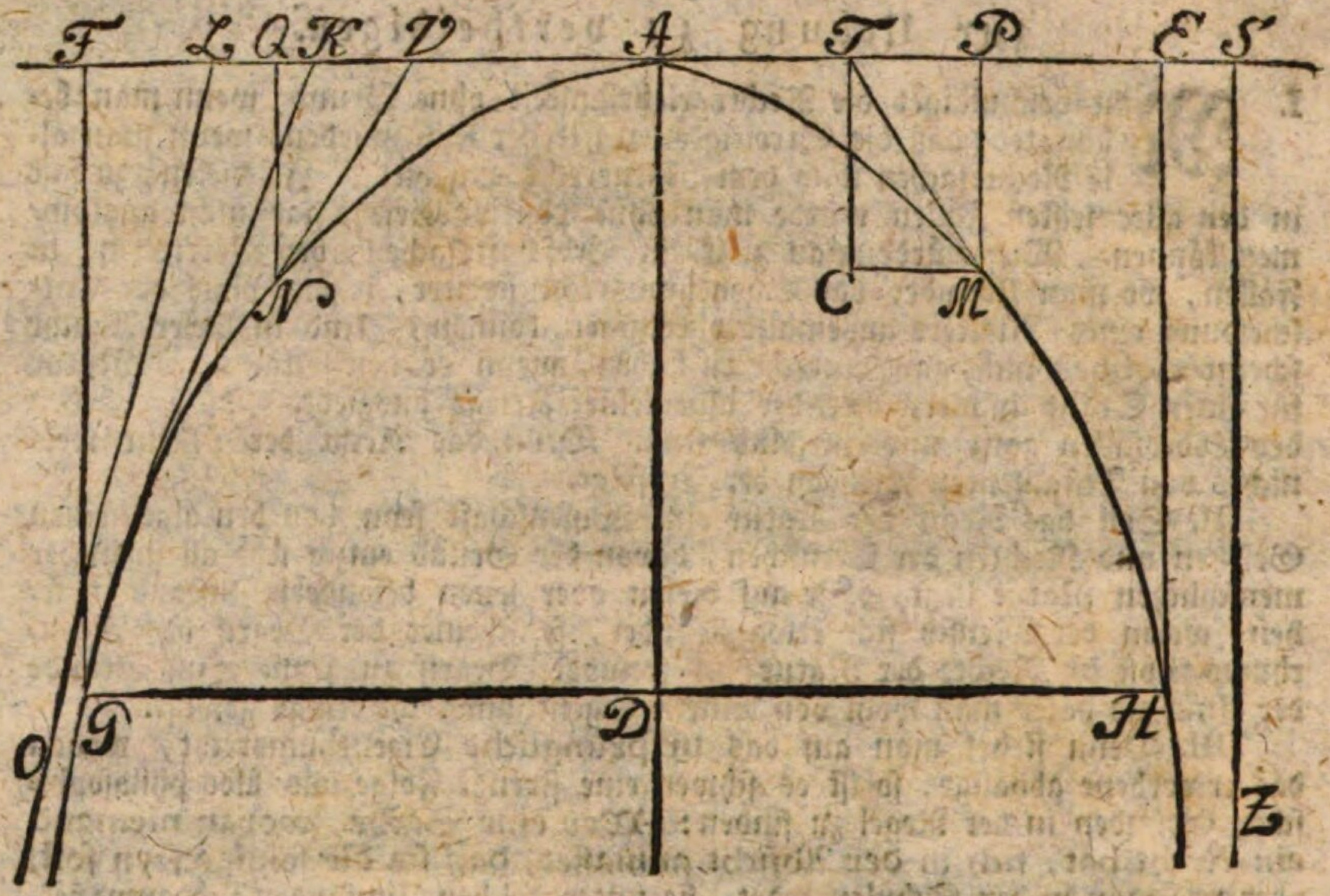
IV. Dennoch bleibet das bey dem jetzigen verderbten Zustand der Menschen eingeführte Eigenthumsrecht eine unvergleichliche Einrichtung, und diejenigen, welche die erste Gemeinschaft der Güter unter den Menschen wieder eingeführt wissen wollen, thun der Wohlfarth des menschlichen Geschlechts sehr nachtheilige Vorschläge.

V. Es ist so sehr nicht zu verwundern, wenn die Herren Rechtsgelehrten sich durch Misdeutung eines Worts verführen laßen, wieder die Mathematik streitende Erklärungen ihrer Gesetze zu machen, wovon die bekante sehr sonderbare Erklärung des Gesetzes von der Verletzung des Verkäufers über die Helfte zeuget, wenn sie dies auf den Käufer so anwenden, daß sie ihn schon für über die Helfte verletzt halten, wenn die Verletzung doch nur erst etwas über den dritten Theil beträgt.

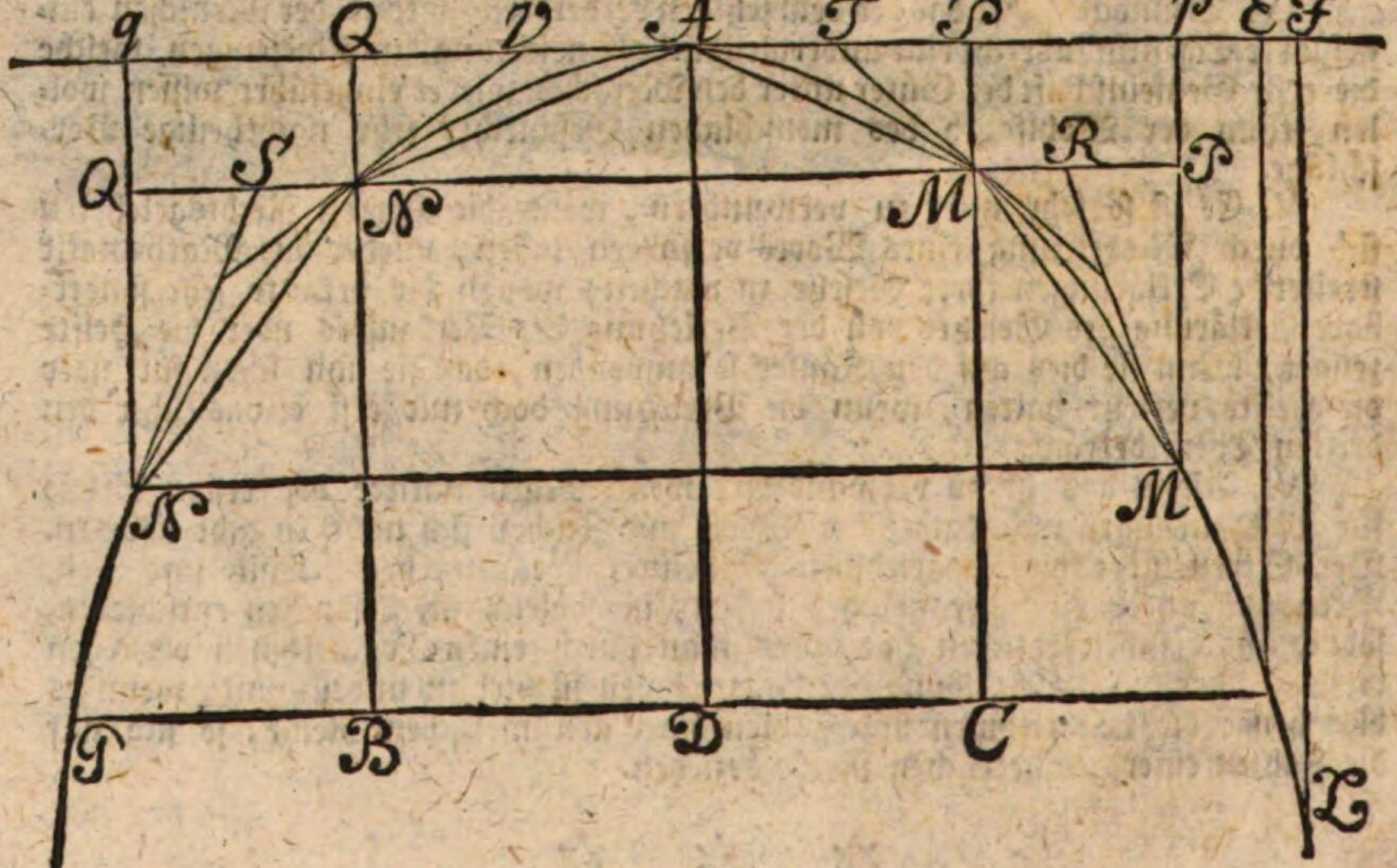
VI. Allein das ist zu verwundern, wenn Mathematiker der ersten Größe für Misdeutungen mathematischer Worte und Zeichen sich nicht in acht nehmen. Der Streit über die Logarithmen verneinter Größen, den Leibnitz und Joh. Bernoulli unter einander geführt haben, ist sogleich für Leibnitzen entschieden, sobald man sich verglichen hat, was man durch einen Logarithmen verstehen wolle. Aber die Beschreibung der Logarithmen ist viel zu unbestimmt, wenn es blos heist: die Logarithmen sind Zahlen einer arithmetischen Reihe, so sich auf die Zahlen einer geometrischen Reihe beziehen.

✡ ✡ ✡

1. Fig.




2. Fig.



# Theoretischer Theil.

§. 1.

Obgleich die Bahn der Bomben und Kanonen-Kugeln in der Geometrie und Mechanick keine unbekante Linie mehr ist, so scheinet es doch, als behauptete der Herr Struensee, in seinen Anfangsgründen der Artillerie. §. 176. S. 208. das Gegentheil. Er erkläret sich nemlich darüber mit diesen Worten. „Da der Wiederstand der Luft bey geschwinden Be„wegungen, dergleichen die Kanonen-Kugeln haben, sehr gros ist, so „wird die Bahn der Kugel auch nicht einmahl beynahe eine Parabel „seyn; was es aber eigentlich für eine Linie sey, kan ich meinen Lesern selbst „nicht sagen. Die größten Mathematickverständige beschäftigen sich „bis jetzt noch damit, diese Linie ausfündig zu machen; alle ihre Be„mühungen sind aber in diesem Stück bishero vergeblich gewesen.„ Es erwähnet zwar der Herr Struensee, daß der Herr Professor Euler in Berlin hievon noch das allergründlichste, in seiner Uebersetzung der neuen Grundsätze der Artillerie des Herren Robins, in der Anmerkung zum VI. Satz des IIten Capitels von S. 631 bis 685 abgehandelt habe. Indessen übergehet er doch, nebst verschiedenen andern hieher gehörigen Stellen aus Herrn Eulers und andrer Schriften, den vortreflichen Aufsatz von der Bewegung der Kugeln, so im IXten Theil der Histoi-

re de l'Academie Royale des Sciences et belles Lettres de Berlin S. 321. von diesem großen Geometer eingerücket ist. Hieselbst ist von ihm diese Theorie ganz vollständig ausgeführet, und eine Anweisung beygefüget, wie man davon in der praktischen Ausübung der Artillerie die beste Anwendung machen, und den größten Nutzen erwarten könne. Ich vermuthe, daß dem Herrn Struensee, vor Verfertigung seines Lehrbuches, diese Abhandlung wohl nicht möge zu Händen gekommen seyn. Wenn er sonst nach dieser Theorie, und nach dem von dem Herrn Euler ihm vorgelegten Muster, praktische Tabellen zum Gebrauch in der Ausübung berechnet; und seiner Artillerie beygefüget hätte, so würden sie seinem an sich sehr nützlichen Werke einen noch größern Vorzug gegeben haben. So viel ich weis, hat sich noch keiner die Mühe gegeben, nach dieser Theorie praktische Tabellen zu berechnen, und zum Gebrauch bekant zu machen. Ich habe daher seit einiger Zeit die Stunden darauf verwandt, welche ich nicht mit den ordentlichen Akademischen Arbeiten besetzt gehabt habe. Und dieses ist mir zugleich eine angenehme Uebung gewesen, weil ich hiebey durch eigene Erfahrung überzeuget worden bin, wie weit sich der Nutzen der sonst bey manchen, wegen ihres vermeinten geringen Nutzens, noch sehr verdächtigen Algebra auch im Militairstande verbreite.

§. 2.

Wenigstens denjenigen Artilleristen, die einige theoretische Kenntnis besitzen, wird es nicht unangenehm seyn, wann ich vorläufig aus den Gründen der Mechanick einige Lehren von der Bahn der Kugeln herleite, bevor ich die praktischen Regeln vortrage: Die angeführte Abhandlung des Herrn Eulers wird dabey zum Grunde liegen. Denn wahrscheinlicher Weise ist die Histoire de l'Academie Royal de Berlin nur eine Zierde der Bibliotheken solcher Gelehrten, die allein die höhern Theorien treiben, ohne daß viele von ihnen Gelegenheit haben, praktische Anwendungen davon zu machen. Indessen werde ich mich nicht ganz genau an dieselbe Ordnung binden, sondern die Sache so vortragen, wie man durch Hülfe der mathematischen Analysis aus den Grundgesetzen der Mechanick diese Auflösung selbst suchen müsse. Doch werde ich freilich Leser voraussetzen müssen, die in der Differential- und Integral-Rechnung geübet sind. Die übrigen werden diesen theo-

retischen Theil überschlagen. Der folgende praktische Theil wird besser von ihnen genutzt werden können.

§. 3.

Es sey also GNAMH die Bahn der Kugel, und A der höchste Punkt, auf welchem die Kugel steiget. Der Ast in welchem die Kugel hinauf steiget, sey GNA, und AMH der Ast, durch welchen sie herunter gehet. Nun ziehe man durch A die grade Linie BAE Horizontal, und nehme sie für die Axe der Abscissen an, auf welcher die Ordinaten PM und QN senkrecht stehen, so daß diese Ordinaten vertical seyn werden. Man setze, es sey die Abscisse AP $= x$ und die Ordinate PM $= y$, der Bogen AM $= s$, und die Zeit, in welcher die Kugel den Bogen AM durchläuft $= t$, die Masse der Kugel $=$ M. Nun resolvire man die Kräfte, welche auf die Kugel würken, nach zweyen Richtungen, die mit AP und PM parallel sind, und setze die Summe der Kräfte, welche nach der Richtung MC mit AP parallel würken $=$ P, und die Summe der andern $=$ Q; so giebt die Mechanik folgende zwey Hauptgleichungen: 1. Fig.

$$\text{I. } \frac{-2ddx}{dt^2} = \frac{P}{M}; \qquad \text{II. } \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Q}{M}.$$

§. 4.

Bey der Anwendung dieser Gleichungen auf die gegenwärtige Aufgabe ist vor allen Dingen nöthig, die Werthe von P und Q zu suchen. Es sind aber der Kräfte, die auf die Kugel würken, zwey. Als zuerst die natürliche Schwere, und hiernächst die Gewalt, mit welcher die Luft der Bewegung der Kugel wiederstehet. Ist nun das Gewicht der Kugel im leeren Raum $=$ M, und das Gewicht einer gleichgroßen Masse natürlicher Luft $= \Pi$, so ist nach den Gesetzen der Schwere, das Gewicht der in der Luft schwebenden Kugel $= M - \Pi$. Dies würde also die Bewegungskraft der Schwere seyn. Und wann diese durch die Masse dividiret wird, so giebt der Quotient die Vergeschwindigungskraft $= \frac{M - \Pi}{M} = 1 - \frac{\Pi}{M}$. Wir wollen der Kürze

 wegen

wegen in der Folge mit Herr Eulern $1 - \frac{\Pi}{M} = \alpha$ setzen. Resolviret man diese Kraft nach den beyden Richtungen AP und PM; so findet man die Kraft mit AP parallel = o, und die Kraft mit PM parallel = $\alpha$.

§. 5.

Die Richtung, nach welcher die Gewalt der Luft der Bewegung der Kugel wiederstehet, ist allemahl der Richtung der Bewegung, und also der Tangente in jedem Punkte M, gerade entgegen gesetzt. Es sey dieser Wiederstand der Luft = R, so ist MT die Richtung dieser Kraft. Man verzeichne das rechtwinklichte Parallelogramm MPTC, so ist PT die Subtangente von der Bahn der Kugel; also PT = $\frac{ydx}{dy}$. Aber PM : PT = 1 : *tg*. PMT, oder $y : \frac{ydx}{dy} = 1 : tg\,PMT$ also *tg* PMT = $\frac{dx}{dy}$. Ferner sec PMT = $\surd\,(1 + tg\,PMT^2) = \surd\,(1 + \frac{dx^2}{dy^2}) = \frac{ds}{dy}$, also sin PMT = $\frac{tg\,PMT}{sec\,PMT} = \frac{dx}{ds}$ und cos PMT = $\surd\,\frac{ds^2 - dx^2}{ds^2} = \frac{dy}{ds}$. Weil nun 1 : sin PMT = R : Kraft nach MC und 1 : cos PMT = R : Kraft nach MP; so ist der Wiederstand nach MC = $\frac{Rdx}{ds}$, und der Wiederstand nach MP = $\frac{Rdy}{ds}$. Hieraus wird in den Hauptgleichungen P = $-\frac{Rdx}{ds}$, und Q = $\alpha - \frac{Rdy}{ds}$, daß also daher folgende Gleichungen erwachsen.

I. $\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{Rdx}{Mds}$ und II. $\frac{2ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{Rdy}{Mds}$, welche die völlige Auflösung der Aufgabe enthalten.

§. 6.

§. 6.

Es ist noch übrig R zu suchen. Der Wiederstand der Luft aber, welchen eine ebene Fläche leidet, so sich mit der Geschwindigkeit, welche ein Körper erhalten hätte, der von der natürlichen Schwere getrieben, aus der Höhe $v$ gefallen wäre, senkrecht gegen die Luft beweget, ist so gros, als das Gewicht einer Luft-Säule, deren Grundfläche der bewegten Fläche gleicht, und deren Höhe $= v$. (Man vergleiche hiemit H. Eulers neue Grundsätze der Artillerie 2 Cap. 1. Satz. 3. An. S. 456.). Wenn aber eine Kugel in der Luft sich beweget, so ist der Wiederstand, welchen sie von der Luft leidet, nur halb so gros als der Wiederstand, so die Fläche ihres grösten Cirkels leiden würde, wenn sie sich senkrecht gegen die Luft bewegte. (A. a. O. S. 451.). Man wird also dies auf gegenwärtigen Fall so anwenden müssen. Es sey die Geschwindigkeit der Kugel in $M = \sqrt{v}$, der Kaliber der Kugel $= \delta$ und das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise $= 1 : \pi$; so ist der Umkreis der Kugel $= \pi\delta$, die Fläche des grösten Cirkels $= \frac{1}{4}\pi\delta^2$, der Inhalt eines Cylinders, dessen Grundfläche dieser Cirkel, und dessen Höhe $= v$, ist $= \frac{1}{4}\pi\delta\delta v$. Der Wiederstand der Luft ist also $=$ dem Gewicht einer Luftsäule, deren körperlicher Inhalt $= \frac{1}{4}\pi\delta\delta v$, wenn sich der gröste Cirkel der Kugel senkrecht gegen die Luft beweget. Auf der Kugel ist die Gewalt des Wiederstandes nur halb so gros, und folglich $=$ dem Gewicht einer Luftsäule, deren körperlicher Inhalt $= \frac{1}{8}\pi\delta\delta v$. Das Gewicht dieser Luftsäule wird also gesucht.

§. 7.

Es war das Gewicht der Kugel $= M$, die Fläche ihres grösten Cirkels $= \frac{1}{4}\pi\delta^2$, ihr körperlicher Inhalt $=$ einem Cylinder dessen Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi\delta^2$, und dessen Höhe $= \frac{2}{3}\delta$; also dieser geometrische Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6}\pi\delta^3$. Ferner war das Gewicht einer gleich grossen Menge Luft $= \Pi$. Es verhalten sich aber, nach den bekannten Gesetzen der Schwere, bey gleichartigen Körpern die Gewichte wie die Räume, folglich $\frac{1}{6}\pi\delta^3 : \frac{1}{8}\pi\delta\delta v = \Pi$: Gewicht einer Luftsäule, deren Inhalt $= \frac{1}{8}\pi\delta\delta v$, und also ist dies Gewicht $= \frac{6\pi\delta\delta v\Pi}{8\pi\delta^3}$ $= \frac{3v\Pi}{4\delta}$. Man kan also setzen $R = \frac{3v}{4\delta}\Pi$, und wenn man mit der

 Masse

Masse der Kugel dividiret, so ist die Verminderung der Geschwindigkeit, welche von dem Wiederstand verursachet wird $= \frac{R}{M} = \frac{3v}{4\delta} \cdot \frac{\Pi}{M}$. Weil übrigens die Gewichte gleich grosser ungleichartiger Körper sich wie ihre specifische Schweren oder Dichtigkeiten verhalten, so ist $M : \Pi =$ die Dichtigkeit der Kugel : Dichtigkeit der Luft, so daß der Bruch $\frac{\Pi}{M}$ aus der specifischen Schwere der Kugel und der Luft bekant ist.

§. 8.

Zu mehrerer Bequemlichkeit in der folgenden Rechnung kan der Ausdruck $\frac{R}{M} = \frac{3v\Pi}{4\delta M}$ also verkürzet werden, daß man $\frac{4\delta M}{3\Pi} = c$ setzet, so wird $\frac{R}{M} = \frac{v}{c}$, und alsdann kan $c$ in jedem besondern Fall auf folgende Art bestimmet werden. Es sey $e^3 =$ dem körperlichen Inhalt einer Menge Wassers, dessen Gewicht $= M$, und man setze $1 : \mu =$ die Dichtigkeit des Wassers : Dichtigkeit der Luft; so war $\Pi =$ dem Gewicht einer Menge Luft, deren körperliche Grösse $= \frac{1}{6}\pi\delta^3$, und nach der Regel, wenn die Gewichte gleich sind, so verhalten sich die Dichtigkeiten umgekehrt wie die körperlichen Räume, hat man die Proportion $\mu : 1 = e^3 :$ körperlichen Inhalt einer Menge Luft, deren Gewicht $= M$. Folglich ist der körperliche Inhalt einer Menge Luft, deren Gewicht $= M, = \frac{e^3}{\mu}$. Es war weiter $\Pi =$ dem Gewicht einer Menge Luft, deren Grösse $= \frac{1}{6}\pi\delta^3$ folglich $M : \Pi = \frac{e^3}{\mu} : \frac{1}{6}\pi\delta^3$, weil bey gleichartigen Körpern die Gewichte der körperlichen Grösse proportional sind. Es ist also $\frac{M}{\Pi} = \frac{6e^3}{\mu\pi\delta^3}$.

Nun

Nun ist die Luft ohngefehr 850 mahl leichter, als das Wasser, daß also $\mu = \frac{1}{850}$, folglich $\frac{M}{\Pi} = \frac{6e^3}{\pi\delta^3} : \frac{1}{850} = \frac{5100e^3}{\pi\delta^3}$, also $c = \frac{4\delta}{3} \cdot \frac{M}{\Pi} = \frac{4\delta}{3} \cdot \frac{5100e^3}{\pi\delta^2} = \frac{6800e^3}{\pi\delta^2}$.

§. 9.

Bisher ist nur derjenige Wiederstand der Luft bestimmet, welcher aus dem Stoß der Kugel auf die Lufttheilchen seinen Ursprung hat. Diese müssen der Kugel ausweichen, und eben deswegen ist hiebey ein Umstand in Betrachtung zu ziehen, der bey den schnellesten Bewegungen zur Verminderung der Geschwindigkeit sehr vieles beyträget. Die Luft kan den leeren Raum hinter der Kugel nicht im Augenblick wieder ausfüllen, wenn die Kugel sehr schnell durch die Luft fähret. So lange dieses nicht geschehen ist, hat die Kugel auf der fordern Fläche die ganze Elasticität der Athmosphäre zu überwinden. Und diese ist der Schwere einer Wassersäule in der Höhe von 32 Fuß gleich. (Herr Euler handelt hievon ausfürlich in den neuen Grundsätzen der Artillerie 2. Cap. 1. Satz. 3. An. S. 476). Es sey $k$ die Höhe der Wassersäule, deren Druck = dem Druck der Athmosphäre auf die Kugel; so ist der körperliche Inhalt derselben $= \frac{1}{4}\pi\delta\delta k$. Nun ist die Luft etwa 850 mahl leichter als Wasser, also der körperliche Inhalt einer gleichschweren Luftsäule $= \frac{850}{4}\pi\delta\delta k = 212\frac{1}{2}\pi\delta\delta k$, und das Gewicht derselben $= 212\frac{1}{2}\pi\delta\delta k\mu$. Da nun $e^3$ = dem körperlichen Inhalt einer Menge Wasser, deren Gewicht = M, so ist $850e^3$ = dem körperlichen Inhalt der Menge Luft, deren Gewicht = M, folglich das Gewicht derselben $= 850e^3\mu$, also die Verminderung der Geschwindigkeit, welche von dieser Elasticität der Luft abhänget $= \frac{212\frac{1}{2}\pi\delta\delta k\mu}{850e^3\mu} = \frac{\pi\delta\delta k}{4e^3}$. Weil nun im §. 8. angenommen wurde $c = \frac{6800e^3}{\pi\delta\delta}$, so ist $\pi\delta\delta = \frac{6800e^3}{c}$ und $\frac{\pi\delta\delta k}{4e^3} = \frac{6800e^3 k}{4c \cdot e^3} = \frac{1700k}{c}$. Diese Grösse mus also zu dem Ausdruck

druck, welcher §. 8. $= \frac{R}{M}$ gesetzt worden, noch addiret werden, und es ist die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit $\frac{R}{M} = \frac{v+1700k}{c}$.

§. 10.

Es wird aber dieser Ausdruck eigentlich alsdann nur gelten, wenn die Geschwindigkeit der Kugel grösser ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft vermöge ihrer Elasticität in den leeren Raum hinter der Kugel eindringt. Ist nun die Luft 850 mahl leichter, als das Wasser, so ist die Elasticität der Luft = dem Gewicht einer Luftsäule, deren Höhe 850 $k$; und eben dies ist die Höhe, aus welcher ein schwerer Körper fallen mus, bis er die Geschwindigkeit erlanget, womit die Luft in einen leeren Raum hineindringet. (Euler a. a. O. S. 467.) Da nun $k$ ohngefehr = 33 rheinländische Fuß, so ist jene Höhe $= 850 \times 33 = 28050$ R. F. also gilt der vorige Ausdruck so lange, als $v > 28050$. R. F., oder so lange als die Geschwindigkeit der Kugel über 1325 R. F. in einer Secunde beträget. Wann nun gleich $v < 850k$, so wird doch der Theil $\frac{1700k}{c}$ von dem Wiederstand der Luft nicht gleich verschwinden, sondern wenn $v = \frac{1}{2} 850k$ so wird dieser Theil des Wiederstandes ohngefähr $= \frac{\frac{1}{2}1700k}{c}$ und überhaupt, wenn $v = 850k : n$, so wird dieser Theil des Wiederstandes auch beynahe $= \frac{1700k}{nc}$, daß wir also den ganzen Wiederstand $= \frac{850k + 1700k}{nc}$ setzen können, wann $v = 850k : n$. Also ist sodann dieser Wiederstand $= \frac{850k + 2 \times 850k}{nc} = \frac{3 \times 850k}{nc} = \frac{3v}{c}$.

Dieser

Dieser Ausdruck ist zwar in geometrischer Schärfe nicht allgemein richtig; allein wir irren sehr wenig bey dieser Voraussetzung. Und wann gleich der Kugel durch die erste Gewalt des Pulvers eine grössere Geschwindigkeit, als von 1325 Schuhen solte mitgetheilet werden; so wird doch die Geschwindigkeit, wegen des ungemein grossen Wiederstandes, sehr bald so viel verringert werden, daß sie weniger als 1325 Schuhe in einer Secunde beträget, und alsdann ist diese Formul so genau richtig, als man bey Untersuchungen von dieser Art in der Ausübung immer verlangen kan. Nun ist $\frac{3v}{c} = \frac{v}{c:3}$, da aber vorhin $c = \frac{6800 e^3}{\pi \delta^2}$ gefunden worden, so ist $\frac{c}{3} = \frac{2266 e^3}{\pi \delta^2} = 721 \frac{e^3}{\delta^2}$ weil $\pi = 3,14159$. Setzen wir also in der Folge $c = 721 \frac{e^3}{\delta^2}$, so ist der Wiederstand $= \frac{v}{c}$. Herr Euler setzet $c = 707 \frac{e^3}{\delta^2}$ ohne Zweifel deswegen, weil er dafür hält, daß der Wiederstand in den meisten Fällen noch etwas grösser sey, als diese Rechnung giebt. Man bringt auch dieselbe Zahl 707 heraus, wenn man im 8. §. die Luft nur etwan 833 mahl leichter als das Wasser annimt. Wie dann auch Herr Euler erinnert, daß man durch Versuche noch ausmachen müsse, ob die Zahl 707 beyzubehalten sey, oder die Erfahrung besser mit der Theorie überein komme, wenn man statt ihrer eine andere Zahl erwählet.

## §. 11.

Setzet man nun in denen Gleichungen des §. 5. $\frac{R}{M} = \frac{v}{c}$, so hat man I. $\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{vdx}{cds}$. Und II. $\frac{2ddy}{dt^2} = a - \frac{vdy}{cds}$. Es war aber $tg\,PMT = \frac{dx}{dy}$ und weil $tg\,PTM = cotg\,PMT$, so ist

 $tg\,PTM$

$tg$ PTM $= \frac{dy}{dx}$. Man setze, diese Tangente sey $= p$, so ist $p = \frac{dy}{dx}$, und $dy = pdx$, folglich $ddy = pddx + dpdx$. Weiter ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = dx\sqrt{(1+pp)}$, und $v = \frac{ds^2}{dt^2}$. Werden diese Werthe in den vorigen Gleichungen substituiret, so ist I. $\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{dx^2\sqrt{(1+pp)}}{cdt^2}$ und II. $\frac{2pddx + 2dpdx}{dt^2} = \alpha - \frac{pdx^2\sqrt{(1+pp)}}{cdt^2}$. Man multiplicire die erste Gleichung mit $p$ so ist $\frac{2pddx}{dt^2} = -\frac{pdx^2\sqrt{(1+pp)}}{cdt^2}$, hievon subtrahire man die zweyte Gleichung, so ist $\frac{2dpdx}{dt^2} = \alpha$, also $2dpdx = \alpha dt^2$, $\frac{2dpdx^2}{dt^2} = \alpha dx$ und $dx^2 = \frac{\alpha dx dt^2}{2dp}$. Es war ferner I. $-\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{dx^2\sqrt{(1+pp)}}{cdt^2}$, oder $-\frac{2dpddx}{dx^2} = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{c}$, und $2dp = \frac{\alpha dt^2}{dx}$, folglich $-\frac{\alpha dt^2}{dx} \cdot \frac{ddx}{dx^2} = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{c}$, oder $-\alpha dt^2 dx^{-3} ddx = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{c}$. Man integrire, so wird $\frac{1}{2}$ $\alpha dt^2 dx^{-2} = \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)} + C$, oder $\frac{\alpha dt^2}{2dx^2} = \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)} + C$. Aber $\frac{\alpha dt^2}{2dx^2} = \frac{dp}{dx}$, folglich $\frac{dp}{dx} = C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}$

und

und $dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Da nun $pdx = dy$ so ist $dy = \frac{pdp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}$.

§. 12.

Liessen sich diese beyde Gleichungen integriren, so würde man nach der Integration $p$ wegschaffen, und auf die Art zwischen $x$ und $y$ eine Gleichung herausbringen können, welche die Natur der gesuchten krummen Linie ausdruckte. Dies ginge leicht an, wann sich die Kugel in einem Luft leeren Raum bewegte, oder die Luft ihrer Bewegung nicht wiederstünde. Denn alsdann wäre $\frac{v}{c} = 0$, also $c = \frac{v}{0} = \infty$ folglich $dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{\infty}\int dp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp}{C}$; $dy = \frac{pdp}{C + \frac{1}{\infty}\int dp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pdp}{C}$. Hieraus findet man $x = \frac{p}{C} + E$. und $y = \frac{pp}{2C} + F$. Weil aber $x = 0$, und $y = 0$, wenn $p = 0$, so fallen E und F weg; und es ist $Cx = p$ und $2Cy = pp$ also $\sqrt{2Cy} = p$ und $Cx = \sqrt{2Cy}$, oder $Cxx = 2Cy$; also $xx = \frac{2}{C}y$, welches die Gleichung für die Parabel ist, deren Parameter $= \frac{2}{C}$. Ich könte C aus den vorigen Gleichungen herleiten, und auf die Art die Theorie von den sonst bekanten Belidorischen Tabellen ausführen. Weil aber der Herr Struensee in seinem Werk von der Artillerie S. 18 §. 11 gar recht schreibet: „Es „ist schade daß diese Tabellen nur in einer solchen Welt nützlich seyn „würden, wo keine Luft wäre, oder wo die Luft der Bewegung der Körper „nicht wiederstünde", so will ich mich hiebey nicht aufhalten, sondern vielmehr eine solche Theorie aus den obigen Formuln herleiten, vermöge welcher man Tabellen zum Gebrauch in unserer jetzigen Welt berechnen könne.

§. 13.

Und so wird nun vor allen Dingen nothwendig seyn, das Integral $\int dp\sqrt{(1+pp)}$ zu suchen. Es ist aber $dp\sqrt{(1+pp)} = \frac{dp(1+pp)}{\sqrt{(1+pp)}}$ $= \frac{pdp+p^3dp}{\sqrt{(p^2+p^4)}}$. Man setze $p^2+p^4=z$, so ist $2pdp+4p^3dp = dz$, $\frac{1}{2}pdp+p^3dp = \frac{1}{4}dz$, $pdp+p^3dp = \frac{1}{4}dz+\frac{1}{2}pdp$, also $dp\sqrt{(1+pp)}$ $= \frac{\frac{1}{4}dz}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}pdp}{\sqrt{(1+pp)}}$ und $\int dp\sqrt{(1+pp)} = \frac{2}{4}z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ $= \frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Um weiter das Integral $\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ zu finden, multiplicire man Zähler und Nenner mit $p+\sqrt{(1+pp)}$, so wird $\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp+\frac{pdp}{\sqrt{(1+pp)}}}{p+\sqrt{(1+pp)}}$, folglich $\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = l\,(p+\sqrt{(1+pp)})$: also $\int dp\sqrt{(1+pp)} =$ $\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}\,l(p+\sqrt{(1+pp)}) + E$. Man setze dies Integral $= 0$, wenn $p = 0$, so wird $E = -l1 = 0$. Man ist aber berechtiget, diese Voraussetzung hier anzunehmen, wenn man sie nur in den folgenden Formuln wo $\int dp\sqrt{(1+pp)}$ vorkomt, allemahl beybehält. Hieraus folgt nun $dx = \frac{dp}{C+\frac{1}{c}(\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}+\frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)}))}$, und $dy = \frac{pdp}{C+\frac{1}{c}(\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}+\frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)}))}$, und zugleich erhellet, daß $x$ und $y$ transcendente Funktionen von $p$ sind, denn wiedrigenfals könten ihre Differentialien nicht transcendent seyn. Wenn man also auch diese Gleichungen integrirte, und alsdann $p$ wegschafte; so würde doch zwischen $x$ und $y$ eine transcendente Gleichung

heraus

heraus kommen, und hieraus folget der Schluß, daß diese Bahn der Kugel in der wiederstehenden Luft eine transcendente Linie sey. Um aber diese Linie zu verzeichnen, und ihre Haupteigenschaften kennen zu lernen, ist es nicht nöthig, diese mühsame Integration vorzunehmen, indem die aufzulösende Aufgabe nur verlanget, daß bey einer gegebenen Ladung und Erhöhung des Stückes die Weite und Höhe des Wurfes, imgleichen die Geschwindigkeit der Kugel gefunden werden soll. Der Erhöhungs-Winkel, dessen Tangent $= p$ ist, würde also doch wieder in die Rechnung gebracht werden müssen, wenn man ihn auch vorhero weggeschaft hätte.

§. 4.

Die bequemste Gleichung, welche so wohl diese Fragen zu beantworten, als auch die Bahn selbsten am leichtesten zu verzeichnen dienet, ist diejenige, welche das Differenzial des Bogens $ds$ ausdrucket. Diese war $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$. Man setze der Kürze wegen $\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}+\frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)}) = \mathrm{P}$, so ist $dx = \frac{dp}{\mathrm{C}+\frac{1}{c}\mathrm{P}}$, folglich $ds = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{\mathrm{C}+\frac{1}{c}\mathrm{P}}$. Weil C noch nicht bestimmet ist, so setze man $c:1 = n:\mathrm{C}$, so daß $\mathrm{C} = \frac{n}{c}$ wird, und es in der Folge nur nöthig sey $n$ zu bestimmen. Dann aber wird $ds = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{\frac{n}{c}+\frac{1}{c}\mathrm{P}}$ oder $ds = \frac{c\,dp\sqrt{(1+pp)}}{n+\mathrm{P}}$. Weil nun $\mathrm{P} = \int dp\sqrt{(1+pp)}$ so ist $d\mathrm{P} = dp\sqrt{(1+pp)}$, folglich $ds = c\,\frac{d\mathrm{P}}{n+\mathrm{P}}$, also $s = cl(n+\mathrm{P}) + \mathrm{E}$. Wann $p = 0$ so ist $\mathrm{P} = 0$ und $s = 0$, also $\mathrm{E} = -cln$. Dahero wird $s = cl(n+\mathrm{P}) - cln = c\,l\frac{n+\mathrm{P}}{n}$. Diese Gleichung $s = c$

$l\,\frac{n+P}{n}$ drucket die Natur der gesuchten Linie auf eine solche Art aus, daß es etwas sehr leichtes ist, die Verzeichnung derselben und alle ihre Eigenschaften daraus herzuleiten.

§. 15.

Weil also $AM = c\,l\,\frac{n+P}{n}$ so wird AN gefunden, wann man $p$ negativ annimmt, so dann aber ist $dp$ negativ, und $\int dp\,\sqrt{(1+pp)} = P$ gleichfals negativ. Daraus folget $d.\,AN = -c\,\frac{dP}{n-P}$ folglich $AN = -c\int\frac{dP}{n-P} = -c\,l\,(n-P) + F$. Hier ist wiederum $AN = 0$ wenn $p = 0$, und also $P = 0$, folglich $F = +\,cln$, und $AN = cln - c\,l\,(n-P) = c\,l\,\frac{n}{n-P}$.

§. 16.

Das erste, was wir hieraus schliessen, betrift die Gestalt der beyden Aeste der krummen Linie, nemlich AM und AN. Wann $p = tg\,PTM = \infty$, so ist $PTM = 90°$, und $P = \frac{1}{2}\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)}) = \infty$, also in diesem Fall $AM = c\,l\,\frac{n+P}{n} = \infty$. Folglich hat der Ast AM eine Asymtote ES, welche die Horizontal-Linie unter einem rechten Winkel schneidet, und also vertical ist. In eben dem Fall wird $AN = c\,l\,\frac{n}{n-\infty}$, also AN unmöglich. Dieses ist ein Beweis, daß AN keine vertical stehende Asymtote habe; indessen wenn $P = n$, so ist $AN = c\,l\,\frac{n}{0} = \infty$. Es hat also auch AN eine Asymtote, welche die Horizontal-Linie un-

ter

ter einen schiefen Winkel schneidet, dessen Tangente aus der Gleichung $P = n$ bestimmet werden mus. Diese Gleichung ist also $\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)}) = n$. Es ist aber $p = tg$ QVN und $\sqrt{(1+pp)} = sec$ QVN, folglich $\frac{1}{2}tg$ QVN $sec$ QVN $+ \frac{1}{2}l(tg$ QVN $+ sec$ QVN$) = n$. Wenn also AN $= \infty$, so mus QVN die Grösse bekommen, welche diese Gleichung verlanget. Man nehme an, daß in diesem Fall, aus QVN der Winkel FLo geworden sey, so ist Lo die Asymtote für den Ast AN. Hieraus fliessen diese beyden Haupt-Regeln:

I. Die Bogen AM und AN sind einander unänlich, da im Gegentheil, wie sonst hinlänglich bekant ist, die beyden Aeste von der Bahn der Kugel im leeren Raum einander änlich seyn würden.

II. Nachdem die beständige Grösse $n$ diesen oder jenen Werth hat, wird auch der Winkel FLo einen andern Werth, und folglich die Asymtote Lo eine andere Lage bekommen. Solte nun $n$ von der verschiedenen Erhöhung des Stückes und der Geschwindigkeit, welche der Kugel durch die Gewalt des Pulvers mitgetheilet wird, abhängen; so werden auch die Bahnen der Kugeln, bey verschiedenen Erhöhungen, und Ladungen, einander unänlich werden; da aller dieser verschiedenen Umstände ungeachtet, die Bahnen im leeren Raum alle einander änlich seyn würden. Der Unterscheid zwischen dieser und der parabolischen Theorie von der Bewegung der Kugeln, ist also sehr gros, und deswegen ist es nicht zu verwundern, daß die Belidorischen Tabellen mit genau angestelleten Versuchen so wenig übereinkommen.

## §. 17.

Alles komt also nunmehro darauf an, daß die beständige Grösse $n$ bestimmt werde. Dies läst sich bewerkstelligen, wenn aus den vorigen Formuln zuforderst ein algemeiner Ausdruck hergeleitet ist, der die Geschwindigkeit der Kugel in jedem Punkt M ihres Weges bestimmt. Ueberhaupt ist die Geschwindigkeit in M $= \frac{ds}{dt}$, also $v = \frac{ds^2}{dt^2}$. Nun war (§. 14.) $ds = \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{C+\frac{1}{c}P}$, also $ds^2 = \frac{dp^2(1+pp)}{(C+\frac{1}{c}P)^2}$.

$\frac{dp^2(1+pp)}{(C+\frac{1}{c}P)^2}$. Weiter ist (§. 11.) $2dpdx = adt^2$, folglich $dt^2 = \frac{2dpdx}{a} = \frac{2dp^2}{a(C+\frac{1}{c}P)}$, und $\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{a(1+pp)}{2(C+\frac{1}{c}P)} = v$. Wann aber §. 14. $C = \frac{n}{c}$ gesetzt worden, so wird $v = \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n+P}$. Dieser Ausdruck gilt für den Bogen AM, denn für AN ist P negativ, wie schon angemerket worden. Also ist im Punkt N die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe $v = \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n-P}$ Es sey nun NV die Tangente in N, und der Winkel FVN $= \phi$, so ist $p = tang\,\phi$, und $\sqrt{(1+pp)} = sec\,\phi$. Also wird (§. 13.) $P = \frac{1}{2}\,tag.\,\phi\,sec.\,\phi + \frac{1}{2}l\,(tg.\,\phi + sec\,\phi)$, und $v = \frac{\frac{1}{2}ac\,sec\,\phi^2}{n-(\frac{1}{2}+tang\,\phi\,sec\,\phi+\frac{1}{2}l(tang\,\phi+sec\,\phi))}$ im Punkt N. Es stehe in G die Kanone oder der Mörser, in der Erhöhung FKG $=\beta$, und die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel zur Mündung des Stücks heraus fähret, sey $= \sqrt{b}$; so ist im ersten Anfang der Bewegung $b = \frac{\frac{1}{2}ac\,sec\,\beta^2}{n-(\frac{1}{2}tg.\,\beta\,sec.\,\beta+\frac{1}{2}l(tg\,\beta+sec.\,\beta))}$. Der Kürze wegen sey $\frac{1}{2}\,tg.\,\beta\,sec\,\beta + \frac{1}{2}l(tg.\,\beta + sec\,\beta) = B$, so ist $nb - Bb = \frac{1}{2}ac\,sec\,\beta^2$, und $n = \frac{\frac{1}{2}ac\,sec\,\beta^2}{b} + B$. Es wird also würklich die beständige Grösse $n$ so wohl durch die erste Geschwindigkeit $\sqrt{b}$, als auch den Erhöhungs-Winkel $\beta$, bestimmt. Wenn man nun diesen gefundenen Werth statt $n$ setzet, so wird der Bogen

$$AN = cl\,\frac{\frac{ac}{2b}sec\,\beta^2 + B}{\frac{ac}{2b}sec\,\beta^2+B-(\frac{1}{2}tg.\,\phi\,sec\,\phi+\frac{1}{2}(tg.\,\phi+sec\,\phi))}, \text{ und}$$

wenn

wenn $\frac{1}{2} tg.\, \varphi\, sec\, \varphi + \frac{1}{2} l\,(tg.\varphi + sec\,\varphi) = \frac{\alpha c}{2b}\, sec\, \beta^2 + B$, so ist $AN = \infty$. Es sey der Werth von $\varphi$, den diese Gleichung bestimmt, $= FLO = \gamma$; so ist $\frac{1}{2} tg.\gamma\, sec\gamma + \frac{1}{2} l (tg\gamma + sec\gamma) = \frac{\alpha c}{2b}\, sec\,\beta^2 + B = n$, und LO ist die Asymtote dieses Astes. Bedienen wir uns nun der obigen Verkürzungen, so ist der Bogen $AG = c\, l\, \frac{n}{n-B}$, so wie überhaupt $AN = c\, l\, \frac{n}{n-P}$, und $AM = c\, l\, \frac{n+P}{n}$.

§. 18.

Nun sollten noch die Abscisse $x$ und Applicate $y$ berechnet werden. Allein die Formuln, welche die Analysis giebt, sind zu verwickelt, als daß sie in der Ausübung zu bequemen Rechnungen gebraucht werden könten. Weil es indessen in der Ausübung auf sehr kleine Irthümer nicht ankömt, so kan man sich einer bequemen Näherung bedienen, die sich auf folgende Betrachtungen gründet. Es sey AN nur ein kleiner Bogen, so daß auch der Winkel QVN nur sehr klein ist; so kan man AQN als einen gradlinichten Triangel betrachten, indem die Sehne AN von ihrem Bogen sehr wenig wird unterschieden seyn. Ist nun NV die Tangente in N und also $QVN = \varphi$, so wird $QAN = \frac{1}{2}\varphi$, weil beynahe $VN = VA$, folglich $AQ = cos\,\frac{1}{2}\varphi.\ c\, l\, \frac{n}{n-P}$, und $QN = sin\,\frac{1}{2}\varphi.\ c\, l\, \frac{n}{n-P}$, weil die Sehne AN beynahe = dem Bogen $AN = c\, l\, \frac{n}{n-P}$. Es sey ferner NN′ ein folgendes kleines Stück der krummen Linie ANN′, so daß dessen Sehne NN′ wiederum demselben fast gleich ist. Man ziehe NQ′ mit AQ parallel, und NS sey die Tangente in N′, welche die verlängerte Tangente VN in V′, schneidet; so ist nun $QSN' = SNV + SV'N = \varphi + SV'N = \varphi + \Delta\varphi$, so daß $\Delta\varphi$ das Stück bedeutet, um welches der Winkel $\varphi$ angewachsen ist, indem der Bogen AN um das Stück 2. Fig.

NN′ anwächset. Da nun auch hier N′V′ beynahe $= V'N$, so ist $V'NN' = \frac{1}{2}SV'N = \frac{1}{2}\Delta\varphi$, und $Q'NN' = \varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi$. Setzt man diesen Winkel der Kürze wegen $= \eta$, so ist $NQ' = \cos\eta\, NN'$ und $Q'N' = \sin\eta\, NN'$. Aber der Bog. $AN' = c\,l\,\frac{n}{n-P'}$, wenn P′ der Werth von P ist, wenn $\varphi$ um $\Delta\varphi$ anwächst, und der Bog. $AN = c\,l\,\frac{n}{n-P}$; also Bog. $NN' = AN' - AN = c\,(l\,\frac{n}{n-P'} - l\,\frac{n}{n-P})$ $= c\,l\,\frac{n-P}{n-P'}$, folglich $NQ' = \cos\eta\, c\,l\,\frac{n-P}{n-P'}$ und $Q'N' = \sin\eta\, c\,l\,\frac{n-P}{n-P'}$.

Auf ähnliche Art findet man die folgenden Stücke des Bogens, der Abscisse, und Ordinate, wenn der Winkel $\varphi$ ferner um die Differenzen $2\Delta\varphi$, $3\Delta\varphi$, $4\Delta\varphi$, u. s. w. anwächst, und man die respondirenden Werthe von P mit $P^{II}$, $P^{III}$, $P^{IV}$ u. s. w. bezeichnet.

| Für die Werthe des Winkels | sind die respondirenden Stücke des Bogens | Der Abscisse | Der Ordinate |
|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $c\,l\,\frac{n}{n-P}$ | $\cos\varphi\, c\,l\,\frac{n}{n-P}$ | $\sin\varphi\, c\,l\,\frac{n}{n-P}$ |
| $\varphi+\Delta\varphi=\varphi^{I}$ | $c\,l\,\frac{n-P}{n-P'}$ | $\cos(\varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P}{n-P'}$ | $\sin(\varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P}{n-P'}$ |
| $\varphi^{I}+\Delta\varphi=\varphi^{II}$ | $c\,l\,\frac{n-P^{I}}{n-P^{II}}$ | $\cos(\varphi^{I}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P^{I}}{n-P^{II}}$ | $\sin(\varphi^{I}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P^{I}}{n-P^{II}}$ |
| $\varphi^{II}+\Delta\varphi=\varphi^{III}$ | $c\,l\,\frac{n-P^{II}}{n-P^{III}}$ | $\cos(\varphi^{II}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P^{II}}{n-P^{III}}$ | $\sin(\varphi^{II}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P^{II}}{n-P^{III}}$ |
| $\varphi^{III}+\Delta\varphi=\varphi^{IV}$ | $c\,l\,\frac{n-P^{III}}{n-P^{IV}}$ | $\cos(\varphi^{III}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P^{III}}{n-P^{IV}}$ | $\sin(\varphi^{III}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\,c\,l\,\frac{n-P^{III}}{n-P^{IV}}$ |
| u. s. w. | | | |

§. 19.

Für den niedersteigenden Bogen gelten eben die Schlüsse, nur mit gehöriger Veränderung der Formuln. Ist der Bogen AM sehr

klein

klein und also seiner Sehne fast gleich, so ist beynahe $AT = MT$, und $PAM = \frac{1}{2}\varphi$, wenn $PTM = \varphi$. Da nun der Bogen $AM = c\,l\frac{n+P}{n}$, so ist $AP = cos\,\frac{1}{2}\varphi\, c\,l\frac{n+P}{n}$, und $PM = sin\,\frac{1}{2}\varphi\, c\,l\frac{n+P}{n}$.

Es sey $MM'$ das folgende kleine Stück des Bogens, und $MR$ die Tangente in $M'$, welche die durch $M$ gezogene Horizontallinie in $R$ die verlängerte Tangente $TM$ aber in $T'$ schneidet; so ist $M'RP' = T'MR + MT'R = \varphi+\Delta\varphi$, so daß $MT'R = \Delta\varphi$, ferner, weil $MT' = M'T'$ beynahe, so ist $M'MT' = \frac{1}{2}\Delta\varphi$, und $P'MM' = \varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi$. Weil überdem $AM = c\,l\frac{n+P}{n}$, und $AM' = c\,l\frac{n+P'}{n}$, so ist $MM' = AM' - AM = c\,(l\frac{n+P'}{n} - l\frac{n+P}{n}) = c\,l\frac{n+P'}{n+P}$, $MP' = cos\,(\varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\, c\,l\frac{n+P'}{n+P}$, und $P'M' = sin\,(\varphi+\Delta\varphi)\, c\,l\frac{n+P'}{n+P}$. Daß diese Schlüsse sich auf die folgenden Theile des Bogens, der Absciſſe und Applicate fortsetzen lassen, erhellet leicht, und wenn man eben die Zeichen wie im vorigen § braucht, so bekomt man folgende Ausdrücke.

| Für die Wehrte des Winkels | sind die respondirenden Stücke: Des Bogens | Der Absciſſe | Der Applicate |
|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $c\,l\frac{n+P}{n}$ | $cos\,\frac{1}{2}\varphi\, c\,l\frac{n+P}{n}$ | $sin\,\frac{1}{2}\varphi\, c\,l\frac{n+P}{n}$ |
| $\varphi+\Delta\varphi=\varphi^{I}$ | $c\,l\frac{n+P^{I}}{n+P}$ | $cos\,(\varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\, c\,l\frac{n+P'}{n+P}$ | $sin\,(\varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi)\, c\,l\frac{n+P'}{n+P}$ |
| $\varphi^{I}+\Delta\varphi^{I}=\varphi^{II}$ | $c\,l\frac{n+P^{II}}{n+P^{I}}$ | $cos\,(\varphi^{I}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^{I})\, c\,l\frac{n+P^{II}}{n+P^{I}}$ | $sin\,(\varphi^{I}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^{I})\, c\,l\frac{n+P^{II}}{n+P^{I}}$ |
| $\varphi^{II}+\Delta\varphi^{II}=\varphi^{III}$ | $c\,l\frac{n+P^{III}}{n+P^{II}}$ | $cos\,(\varphi^{II}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^{II})\, c\,l\frac{n+P^{III}}{n+P^{II}}$ | $sin\,(\varphi^{II}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^{II})\, c\,l\frac{n+P^{III}}{n+{}^{II}}$ |
| $\varphi^{III}+\Delta\varphi^{III}=\varphi^{IV}$ | $c\,l\frac{n+P^{IV}}{n+P^{III}}$ | $cos\,(\varphi^{III}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^{III})\, c\,l\frac{n+P^{IV}}{n+P^{III}}$ | $sin\,(\varphi^{III}+\frac{1}{2}\Delta\varphi^{III})\, c\,l\frac{n+P^{IV}}{n+P^{III}}$ |
| u. s. w. | | | |

 Ist

Ist nun einmahl der Werth von $n$ bestimmet, so ist es leicht eine Tabelle zu berechnen, die für jeden Werth von $\phi$ die Werthe der veränderlichen Grössen enthält, welche in die beständige Zahl $c$ multiplicirt sind. Da dann bey der würklichen Berechnung folgende Punkte zu merken sind.

§. 20.

Das $l$ in den Formuln bedeutet den natürlichen Logarithmen aus dem Nepperschen System, dessen Modulus = 1 ist. Wenn man also die Rechnung aus den gewöhnlichen Tafeln anstellt, welche die Briggischen Logarithmen enthalten, deren Modulus $= \frac{1}{2,30585092 \text{ rc.}}$ ist, so mus man diese Logarithmen auf die natürlichen dadurch reduciren, daß man mit dem Modulo $\frac{1}{2,305850 \text{ u. s. w.}}$ dividirt, oder welches einerley ist, diese Logarithmen mit der Zahl 2, 3058508 multipliciret. Bey Berechnung der Tafeln selbst hat man diese Mühe nicht nöthig, sondern es ist hinlänglich, wenn nur beym Gebrauch der Tafeln statt mit $c$ zu multipliciren jedesmahl mit 2, 3058508 $c$ multipliciret wird. Ferner komt es darauf an, daß man für jeden Werth von $\phi$ den respondirenden Werth von P gehörig sucht aus der Gleichung $P = \frac{1}{2} \, tang \, \phi \, sec \, \phi + \frac{1}{2} \, l (tang \, \phi + sec \, \phi)$. Diese Formul läst sich so verändern, daß die Rechnung mit den Logarithmen bequemer von statten gehet. Es ist nemlich $tang \, \phi + sec \, \phi = tang \, (45° + \frac{1}{2} \phi)$, und also $P = \frac{1}{2} \, tang \, \phi \, sec \, \phi + \frac{1}{2} \, l \, tang \, (45° + \frac{1}{2} \phi)$, wobey jedoch zu merken ist, daß $l$ hier wiederum den natürlichen Logarithmen bedeutet. Wenn man also diesen Logarithmen aus den gemeinen Tafeln nimt, so mus die Reduction wie oben geschehen. Es wird nicht undienlich seyn, die Richtigkeit der Gleichung $tang \, \phi + sec \, \phi = tang \, (45° + \frac{1}{2} \phi)$ hier besonders zu beweisen. Wenn A und B ein paar Winkel oder Cirkelbogen bedeuten; so ist $tang \, (A + B) = \frac{tang \, A + tang \, B}{1 - tang \, A \, tang \, B}$. Diese Formul findet man in allen neuen Lehrbüchern der Analytischen Trigonometrie bewiesen. Wenn also A = B = ½ a.

$= \frac{1}{2}\alpha$ so ist $tang\,\alpha = \frac{2\,tang\,\frac{1}{2}\alpha}{1 - tang\,\frac{1}{2}\alpha^2}$. Hieraus folgt $tang\,\alpha - tang\,\alpha\,tang\,\frac{1}{2}\alpha^2 = 2\,tang\,\frac{1}{2}\alpha$, und $tang\,\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{2}{tang\,\alpha}\,tang\,\frac{1}{2}\alpha = 1$, ferner $tang\,\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{2}{tang\,\alpha}\,tang\,\frac{1}{2}\alpha\,\frac{1}{tang\,\alpha^2} = 1 + \frac{1}{tang\,\alpha^2}$. Hievon ist die Quadratwurzel $tang\,\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{tang\,\alpha} = \sqrt{(1 + \frac{1}{tang\,\alpha^2})}$, oder $tang\,\frac{1}{2}\alpha + cot\,\alpha = cosec\,\alpha$. Weiter ist $cot\,\alpha = \frac{1 - tang\,\frac{1}{2}\alpha^2}{2\,tang\,\frac{1}{2}\alpha}$ $= \frac{1}{2\,tang\,\frac{1}{2}\alpha} - \frac{tang\,\frac{1}{2}\alpha}{2}$, oder $cot\,\alpha = \frac{1}{2}\,cot\,\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\,tang\,\frac{1}{2}\alpha$ also $2\,cot\,\alpha = cot\,\frac{1}{2}\alpha - tang\,\frac{1}{2}\alpha$, und $cot\,\frac{1}{2}\alpha - cot\,\alpha = cot\,\alpha + tang\,\frac{1}{2}\alpha$. Es war aber $cot\,\alpha + tang\,\frac{1}{2}\alpha = cosec\,\alpha$, also wird $cosec\,\alpha = cot\,\frac{1}{2}\alpha - cot\,\alpha$. Ist nun $\phi$ des Winkels $\alpha$ Ergänzung zum rechten Winkel, so daß $\alpha = 90° - \phi$, so wird $sec\,\phi = cot\,(45° - \frac{1}{2}\phi) - tang\,\phi$, und $tang\,\phi + sec\,\phi = cot\,(45° - \frac{1}{2}\phi) = tang\,(90° - 45° + \frac{1}{2}\phi) = tang\,(45° + \frac{1}{2}\phi)$. Setzt man nun in der Gleichung $P = \frac{1}{2}\,tang\,\phi\,sec\,\phi + \frac{1}{2}\,l\,tang\,(45° + \frac{1}{2}\phi)$ nach und nach den Winkel $\phi = 1°, 2°, 3°$, u. s. w., und bringt die zugehörigen Werthe in eine Tabelle, so kan man sie daraus nachdem in jedem speciellen Fall ausschreiben. Im 23. §. findet man diese Tabelle unter dem Titel einer Hülfstabelle zuletzt beygefügt, und so ist sie auch vom Hrn. Euler in der angeführten Stelle des IXten Theils der Mem. de Berlin genannt worden.

## §. 21.

Diese bisherigen Theorien sind nun völlig hinlänglich, in jedem vorkommenden Fall folgende Aufgabe aufzulösen:

Der Kaliber des Stücks und der Kugel nebst ihrer Schwere sind gegeben, die Kugel wird mit einer gegebenen Ladung,

Ladung, unter einem gegebenen Erhöhungswinkel geworfen; man verlangt zu wissen, 1) wie weit die Kugel getrieben wird, 2) wie hoch sie steigt, 3) mit welcher Stärke sie entweder auf dem horizontalen Boden, oder einem andern Gegenstand, den sie unterweges antrift, anschlagen wird, ja auch wenn es erfordert wird, 4) die Zeit, welche sie auf ihrer Reise durch die Luft zubringt.

Zuerst mus man aus dem bekannten Kaliber des Stücks, der Kugel, ihrer Schwere, und der gegebenen Ladung die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher die Kugel zur Mündung des Stücks heraus fährt. Dies ist eine Präliminair-Aufgabe, deren Auflösung bey der gegenwärtigen vorausgesetzt wird. Die Herrn Robins und Euler handeln davon ausführlich in dem schon oft angeführten Werk über die Artillerie. Die hieher gehörigen Untersuchungen findet man auch in dem Essai d'une nouvelle Theorie d'Artillerie par M. le Chevalier d'Arcy erweitert, und durch mehrere Versuche aufgeklärt. Dies Buch ist mir nur aus der Anzeige im Journal des Sçavans Aout. 1761. S. 44. bekannt. Selbst habe ich es noch nicht können zu sehen bekommen. Ist diese Geschwindigkeit der Kugel gefunden, und man setzet sie $= \gamma b$, den Erhöhungs-Winkel $= \beta$, so bestimmt die Gleichung $n = \frac{\frac{1}{2} a c \sec \beta^2}{b} + B$ (§. 17.) die Zahl $n$. Ist diese Zahl gefunden, so berechnet man Stückweise nach dem 18 und 19ten §. die Absciſſen und Ordinaten, da es dann leicht ist, die Linie zu verzeichnen, in welcher die Kugel fortgehet. Bey der würklichen Berechnung hat man die Veränderung des Winkels $\varphi$ bey dem aufsteigenden Bogen nur so lange fortzusetzen, bis derselbe dem gegebenen Erhöhungs-Winkel gleich wird. Ist man so weit gekommen, und man rechnet alsdann alle gefundenen Stücke der Ordinate zusammen, so hat man die Höhe des Schusses AD, oder EH. Beym heruntersteigenden Bogen aber mus man die Rechnung so lange fortsetzen, bis die Ordinate so gros wird, als die gefundene Höhe AD des Wurfs war, wenn man nemlich voraus setzt, daß die Kugel auf einem horizontalen Boden niederschlägt. Summirt man sodann alle gefundene Theile der Absciſſen, sowohl des auf- als auch des niedersteigenden Bogens, so

hat

hat man die Weite des Schusses GH. Die Grösse, welche jetzt der Winkel $\varphi$ erhalten hat, giebt denjenigen Winkel, unter welchem die Kugel an den horizontalen Boden anschlägt. Die Geschwindigkeit in H giebt die Formul $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c \sec \varphi^2}{n+P}$, wenn man für P den letzten Werth nimt, den der letzte Winkel $\varphi$ unter welchem die Kugel anschlägt, bestimmet. Es wird alsdann diese Geschwindigkeit $= \sqrt{v}$ $= \frac{\sec \varphi \sqrt{\frac{1}{2}\alpha c}}{\sqrt{(n+P)}}$, wobey zu merken ist, daß diese Formul den Weg ausdruckt, den die Kugel mit dieser letzten Geschwindigkeit in $\frac{1}{250}$ einer Secunde zurücklegen würde, wenn man $v$ in Tausendtheilchen eines Rheinl. Fusses ausdrückt. Die Formul kan aber auch so verändert werden, daß sie die Geschwindigkeit durch den Weg ausdrückt, den die Kugel, wenn sie mit derselben gleichförmig fortginge, in einer Secunde zurücklegen würde. Es bedeute $g$ die Höhe, aus welcher ein schwerer Körper im leeren Raum in der ersten Secunde fält, so ist die Geschwindigkeit $= \sqrt{4gv}$ R. F. in einer Secunde; welche also $= \frac{\sec \varphi \sqrt{2\alpha g c}}{\sqrt{(n+P)}}$. Aus dieser Geschwindigkeit findet man alsdann nach den gewöhnlichen Regeln die Gewalt, mit welcher die Kugel anschlägt. Fält die Kugel unter der Horizontallinie GHZ bis auf eine gegebene Tiefe ZL, welches z. E. geschehen würde, wenn die Kanone in G auf einem Berge stünde; so gehet sie um das Stück HZ weiter. Man mus also mit Berechnung des heruntersteigenden Astes so lange fortfahren, bis die Applicate KL so gros wird, als die Höhe des Schusses + der Tiefe ZL unter der Horizontallinie GHZ, da dann die Summe der Abcissen AF + AK die Weite des Schusses giebt. Soll endlich die Kugel einen Ort treffen, der über der Horizontallinie GZ in bekanter Höhe MC liegt, so kan dies zweymahl geschehen, einmahl beym herunterfallen in M; es kan auch im heraufsteigen bey N geschehen, wenn N mit M in einer Horizontallinie liegt. Soll das erste geschehen, so fährt man für den heruntersteigenden Ast mit der Rechnung nur so lange fort, bis die Ordinate so gros wird, als die

Differenz

Differenz der beyden Höhen AD und CM, und es giebt AF + AP die Weite des Schusses. Soll aber die Kugel im Heraufsteigen den Ort N treffen, so braucht man den niedersteigenden Ast gar nicht, sondern man sucht nur, wie gros die Abcisse AQ für den aufsteigenden Ast sey, wenn die Ordinate = der Höhe AD — der Höhe BN, und subtrahirt diese von AF, so zeigt die Differenz GB = FQ, wie weit das Stück von der Verticallinie durch N entfernet seyn müsse, damit die Kugel den Fleck N treffe. Würde die Zeit auch erfordert, welche die Kugel unterweges zubringt, so würde man sie, ohne daß man nöthig hätte, sich auf die Integration der Formul $dt = \frac{ds}{rv}$ einzulassen, ebenfalls durch Näherung stückweise finden können. Gienge die Kugel von A bis M gleichförmig mit der Geschwindigkeit C, so wäre die Zeit, welche sie zubringt, von A bis M zu kommen $= \frac{AM}{C}$. Da sich nun die Geschwindigkeit von A bis M so sehr nicht ändert, wenn AM sehr klein ist, so kan man für C die mittlere Geschwindigkeit annehmen zwischen denen beyden, womit die Kugel in A und M fortgehet, und auf die Art die Zeit finden, in welcher die Kugel den Bogen AM durchläuft. Verfährt man eben so mit allen berechneten Stücken der Linie GNAMH, so kan man die auf solche Art gefundenen Zeittheile zuletzt alle in eine Summe bringen, und auf die Art erhält man die ganze Zeit, welche die Kugel die ganze Linie CNAMH durchzulaufen gebraucht hat. Diese Untersuchung der Zeit wird indessen in der Ausübung der Artillerie beym Kriegswesen eben nicht viel gebraucht werden. Der Nutzen dieser Untersuchung kan sich höchstens nur auf die Prob-Schüsse erstrecken, wozu man wohl die verticalen Schüsse zu erwehlen pflegte, da man denn aus der bemerkten Zeit, welche die Kugel in der Luft zugebracht hat, die Geschwindigkeit schliest, mit welcher die Kugel zur Mündung der Kanone heraus getrieben worden. Was aber die Theorie von diesen verticalen Schüssen zur Ausübung nutzbares liefern kan, ist schon zur völligen Richtigkeit gebracht. Man vergleiche hiemit dasjenige, was Hr. Euler im erläuterten Robins 2. Cap. 6. Satz 2. Anm. 645 u. f. Seite ausgeführt hat. Deswegen werde ich die verticalen Schüsse in gegenwärtiger Abhandlung ganz bey Seite setzen.

Für

# Practischer Theil.

§. 22.

Für die practischen Artilleristen würde es viel zu mühsam seyn, nach dieser Anweisung in jedem Fall die Rechnung anzustellen. Den meisten würden die gegebenen Vorschriften auch noch nicht verständlich genug seyn. Ich werde mich also bemühen, die Regeln so aus einander zu setzen, daß sie von allen, die auch nur mit den gemeinsten Kenntnissen der Rechenkunst und Geometrie versehen sind, genützt werden können, und das wird die Absicht dieses practischen Theils seyn. Die Belidorischen Tabellen für die Verhältnisse der Schusweiten bey verschiedenen Erhöhungswinkeln sind so berechnet, als wenn die Bahn der Kugel allemahl eine Parabel wäre, und es ist leicht, die Tabellen zu gebrauchen, um daraus die Schusweiten in jedem Fall zu finden, wenn man auch weder die Eigenschaften der Parabel kennet, noch sonsten mit den hiezu nöthigen Kenntnissen aus der Mechanik versehen ist, wie es denn auch unter den Artilleristen, welche die Belidorischen Tabellen gebrauchen, wohl nicht viele giebt, welche jemahls eine Algebraische Gleichung aufgelöst haben. Sollte gleich die Rechnung ein wenig weitläuftiger werden, so wird sie doch eben nicht schwerer werden, wenn man solche Tabellen statt der Belidorischen zu Hülfe nehmen kan, welche sich auf die vorhin vorgetragene Theorie von der wahren Bahn der Kugel gründen. Viele Feldmesser, Ingenieurs und Künstler stellen allerhand Rechnungen an, welche sich auf den tieffsinnigsten Theorien gründen, ohne deswegen die Theorien selbst zu wissen, sie sind mit den blossen Regeln zu frieden, ohne weitläuftigen Demonstrationen, und bringen es in der Anwendung dieser Regeln oft zu einer grossen Fertigkeit. Man darf um ein Beyspiel zu haben nur an die Logarithmen denken; kein Feldmesser und Ingenieur kan die Logarithmen Tafeln entbehren, er rechnet daraus mit eben der Fertigkeit, wie derjenige Geometer, der ihren Ursprung aus der Hyperbel einsiehet, und alle Kunstgriffe weis, deren man sich bey Verfertigung dieser Tafeln theils vordem bedienet hat,

theils vermöge der neuern Theorien bedienen könte, wenn man es für gut halten sollte, sie nochmahl nachzurechnen. Um diese Dinge bekümmert sich der Feldmesser nicht, er kennet weder die Hyperbel zwischen ihren Asymtoten, noch auch die logarithmische Linie. Er hat sich die Regeln nur erklären lassen, wie man mit den Logarithmen in der Trigonometrie, und bey andern ähnlichen Rechnungen umgehen müsse. Hiemit ist er zufrieden, und verläst sich übrigens auf denjenigen, der die Tafeln berechnet hat. Den meisten sollte es sehr schwer werden, auch nur die Frage: was ein Logarithmus sey? zu beantworten. Dies wird mich rechtfertigen, wenn ich hier mit der Absicht umgehe, den praktischen Artilleristen Regeln zur Berechnung der Schusweiten vorzutragen, die sich auf die Theorie von solchen krummen Linien gründen, die in die Classe transcendenter Linien höherer Ordnungen gehören. Ich bin ihnen nicht anmuthen, diese Linien selbst kennen zu lernen, sondern die Regeln, welche ich ihnen vorlegen will, sollen nichts schwerer seyn, als diejenigen Rechnungsregeln, welche einem jedem Ingenieur nothwendig bekant seyn müssen. Ich werde ihnen statt der Belidorischen Tafeln andre vorlegen, und zum Gebrauch anpreisen, sie aber zugleich durch solche Vorschriften, über deren Schwierigkeit sie nicht klagen sollen, in den Stand setzen, von diesen Tafeln einen bessern Nutzen als von jenen Belidorischen zu ziehen. Wenn ich aber nunmehro die Tafeln selbst hersetze, und die Regeln, wie sie zu gebrauchen sind, erkläre; so mus ich zugleich denjenigen Lesern, welche die vorhin vorgetragenen Theorien haben beurtheilen können, den Plan vorlegen, nach welchen diese Tafeln berechnet sind. Nur gegen diese darf ich mich wegen ihrer Einrichtung rechtfertigen. Die übrigen würden zufrieden seyn, wenn nur der Erfolg mit der Rechnung übereinstimmete.

§. 23.

Die Gestalt der krummen Linie, in welcher die Kugel fortgehet, verändert sich allemahl, wenn die Grösse der Zahl $n$ sich ändert. Und es giebt also unzählige Arten von krummen Linien, die insgesamt durch die Gleichung $ds = \frac{dP}{n+P}$ ausgedrückt werden. Die Zahl $n$ bestimmt den Winkel $\gamma$, welchen die Asymtote des aufsteigenden Asts mit der Horizontallinie macht, vermöge der Gleichung $n = \frac{1}{2} \tan\gamma \sec\gamma$

$+ \frac{1}{2} l\,tang$

$+\frac{1}{2}\, l\, tang\,(45^\circ+\frac{1}{2}\gamma)$, und eben die Gleichung bestimmt umgekehrt die Zahl $n$ durch den Winkel $\gamma$. Ich will diesen Winkel in der Folge der Kürze wegen den Asymtoten-Winkel nennen. Er ist eigentlich die Ergänzung des Winkels, unter welchem die eine Asymtote die andre schneidet zum rechten Winkel. So lange $\gamma$ zwischen $0^\circ$ und $90^\circ$ fällt, bleibt $n$ positiv. Für $\gamma = 90^\circ$ wird $n = \infty$, und für $\gamma = 0$, wird $n = 0$. Zu diesen Arten, bey welchen der Winkel $\gamma$ zwischen $0^\circ$ und $90^\circ$ fällt, gehören alle im Kriegswesen gebräuchliche Schüsse. Und ob dieses gleich unzählig viele Arten werden, wenn man die Sache in geometrischer Schärfe betrachtet, so werden doch diejenigen Arten nicht sehr von einander unterschieden seyn, bey welchen die Differenzen des Winkels $\gamma$ nicht sehr gros sind. Wollte man den Winkel $\gamma$ nach und nach $= 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ u. s. w. bis $89^\circ$ setzen, so würde man neunzig verschiedene Arten herausbringen. Die Voraussetzung $\gamma = 90^\circ$ kan hier wegbleiben, weil nur von Bogenschüssen die Rede ist. Da nun für jede Art eine besondre Tafel nöthig ist, so würde man neunzig verschiedene Tafeln brauchen, welche zu berechnen, viele Mühe und Zeit kosten würde. Man kan in der Ausübung aber gar wohl grössere Differenzen zwischen den Winkel $\gamma$ annehmen, wenn man nachdem bey der Berechnung eine geschickte Interpolation mit den Tafeln verbindet. Und deswegen schlägt Hr. Euler vor, die Differenzen von $5^\circ$ anzunehmen. Die Werthe, welche die Gleichung $n = \frac{1}{2}\, tang\, \gamma\, sec\, \gamma + \frac{1}{2}\, l\, tang\, (45^\circ + \frac{1}{2}\gamma)$ für die Zahl $n$ bestimmt, in der Voraussetzung $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 5^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, u. s. w. enthält folgende Tafel.

| $\gamma$ | $n$ | $\gamma$ | $n$ | $\gamma$ | $n$ | $\gamma$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 25° | 0, 4826944 | 45° | 1, 1477934 | 70° | 4, 884250 |
| 5° | 0, 0876001 | 30° | 0, 6079863 | 50° | 1, 4323620 | 75° | 8, 22357 |
| 10° | 0, 1772365 | 35° | 0, 7538161 | 55° | 1, 822067 | 80° | 17, 54793 |
| 15° | 0, 2711218 | 40° | 0, 9291380 | 60° | 2, 390330 | 85° | 67, 12291 |
| 20° | 0, 3718537 | | | 65° | 3, 290396 | | |

Hieraus entspringen also achtzehn Hauptarten, und die Anzahl der nöthigen Tafeln wird dadurch bis auf achtzehn herunter gesetzt, wovon auch noch die erste abgehet, welche in der Voraussetzung $n = 0$ berechnet werden müste. Daß also nur siebenzehn Hauptarten übrig bleiben, welche die folgenden siebenzehn Tafeln enthalten.



Die

## Die II. Art, $\gamma = 5^\circ$, aufsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2,302585c$ mult. mit | Weite AF $=2,302585c$ mult. mit | Höhe GH $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 | 3,3786854 |
| 1° | 0,0965129 | 0,0965092 | 0,0008422 | 3,7763345 |
| 2° | 0,2209223 | 0,2208782 | 0,0040988 | 4,3598700 |
| 3° | 0,3963532 | 0,3961391 | 0,0117510 | 5,3397412 |
| 4° | 0,6965875 | 0,6958236 | 0,0300797 | 7,5526717 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel im H | Bogen AH $=2,302585c$ mult. mit | Weite AE $=2,302585c$ mult. mit | Höhe EH $=2,3025285c$ mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 2° | 0,1457306 | 0,1457084 | 0,0025433 | 2,8582293 |
| 4° | 0,2550070 | 0,2548350 | 0,0082624 | 2,5252459 |
| 6° | 0,3428220 | 0,3423158 | 0,0159160 | 2,2894037 |
| 8° | 0,4165760 | 0,4155200 | 0,0249043 | 2,1120628 |
| 10° | 0,4804733 | 0,4786306 | 0,0349000 | 1,9731477 |

## Die III. Art, $\gamma = 10^\circ$, aufsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2,302585c$ mult. mit | Weite AF $=2,302585c$ mult. mit | Höhe FG $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 | 2,3753422 |
| 2° | 0,0953217 | 0,0953072 | 0,0016636 | 2,6524606 |
| 4° | 0,2181445 | 0,2179617 | 0,0080917 | 3,0609407 |
| 6° | 0,3915881 | 0,3907453 | 0,0232083 | 3,7488945 |
| 8° | 0,6894332 | 0,6874813 | 0,0595065 | 5,3050237 |

Nieder=

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $=2,302585c$ mult. mit | Weite AE $=2,302585c$ mult. mit | Höhe F.H $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 3° | 0,1113250 | 0,1101213 | 0,0031012 | 2,0942464 |
| 6° | 0,2025174 | 0,1999013 | 0,0098925 | 1,8916926 |
| 9° | 0,2741571 | 0,2741841 | 0,0198539 | 1,7283868 |
| 12° | 0,3440485 | 0,3390889 | 0,0317250 | 1,6341608 |
| 15° | 0,4030721 | 0,3964805 | 0,0455035 | 1,5461214 |
| 18° | 0,4571276 | 0,4483100 | 0,0608561 | 1,4755482 |

## Die IV. Art, $\gamma = 15^{\circ}$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2,302585c$ mult. mit | Weite AF $=2,302585c$ mult. mit | Höhe FG $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 | 1,9205154 |
| 3° | 0,0933356 | 0,0933036 | 0,0024432 | 2,1413181 |
| 6° | 0,2135161 | 0,2131136 | 0,0118724 | 2,4692300 |
| 9° | 0,3836458 | 0,3817878 | 0,0340787 | 2,9554307 |
| 12° | 0,6774771 | 0,6706989 | 0,0876254 | 4,1855440 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $=2,302585c$ mult. mit | Weite AE $=2,302585c$ mult. mit | Höhe EH $=2,302585c$ mult. mit | Geschind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 4° | 0,0997241 | 0,0996633 | 0,0034802 | 1,7536658 |
| 8° | 0,1818634 | 0,1813526 | 0,0120661 | 1,5720129 |
| 12° | 0,2528173 | 0,2512286 | 0,0243945 | 1,4675900 |
| 16° | 0,3163782 | 0,3129014 | 0,0397712 | 1,3879919 |
| 20° | 0,3750299 | 0,3686825 | 0,0578539 | 1,3271378 |
| 24° | 0,4305454 | 0,4201555 | 0,0786503 | 1,2806038 |
| 28° | 0,4842974 | 0,4684675 | 0,1022136 | 1,2454701 |

## Die V. Art, $\gamma = 20°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel β | Bogen AG = 2, 302585c mult. mit | Weite AF = 2, 302585c mult. mit | Höhe FG = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 1, 6398866 |
| 4° | 0, 0905521 | 0, 0904969 | 0, 0031602 | 1, 8245221 |
| 8° | 0, 1164873 | 0, 2063461 | 0, 0153364 | 2, 1017495 |
| 12° | 0, 3725202 | 0, 3693128 | 0, 0440718 | 2, 5743617 |
| 16° | 0, 6606770 | 0, 6489102 | 0, 1137832 | 3, 6501517 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH = 2, 302585c mult. mit | Weite AE = 2, 302585c mult. mit | Höhe EH = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0918697 | 0, 0917823 | 0, 0040073 | 1, 4809286 |
| 10° | 0, 1692716 | 0, 1685220 | 0, 0141103 | 1, 3703347 |
| 15° | 0, 2378224 | 0, 2354479 | 0, 0298991 | 1, 2912406 |
| 20° | 0, 3013664 | 0, 2960509 | 0, 0490070 | 1, 2339923 |
| 25° | 0, 3617008 | 0, 3517926 | 0, 0720979 | 1, 1935925 |
| 30° | 0, 4211195 | 0, 4044976 | 0, 0995344 | 1, 1665192 |

## Die VI. Art, $\gamma = 25°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel β | Bogen AG = 2, 302585c mult. mit | Weite AF = 2, 302585c mult. mit | Höhe FG = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 | 1, 4393417 |
| 4° | 0, 0680265 | 0, 0679850 | 0, 0023741 | 1, 5604031 |
| 8° | 0, 1500372 | 0, 1495465 | 0, 0109465 | 1, 7275465 |
| 12° | 0, 2546503 | 0, 2525703 | 0, 0291124 | 1, 9728074 |
| 16° | 0, 4002202 | 0, 3938157 | 0, 0643288 | 2, 3737360 |
| 20° | 0, 6389720 | 0, 6208915 | 0, 1381103 | 3, 1964256 |
| 24° | 1, 3188315 | 1, 2512462 | 0, 1928901 | 7, 1920049 |

# Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH =2, 302585c mult. mit | Weite AE =2, 302585c mult. mit | Höhe EH =2, 302585c mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0724270 | 0, 0723579 | 0, 0031599 | 1, 3293800 |
| 10° | 0, 1358262 | 0, 1352150 | 0, 0114358 | 1, 2497529 |
| 15° | 0, 1935932 | 0, 1916079 | 0, 0239389 | 1, 1924043 |
| 20° | 0, 2480642 | 0, 2435578 | 0, 0403183 | 1, 1511079 |
| 25° | 0, 3010300 | 0, 2924918 | 0, 0605752 | 1, 1229572 |
| 30° | 0, 3540254 | 0, 3394992 | 0, 0850457 | 1, 1057848 |
| 35° | 0, 4085255 | 0, 3854641 | 0, 0743286 | 1, 0978342 |
| 40° | 0, 4661109 | 0, 4311496 | 0, 1093817 | 1, 0986370 |
| 45° | 0, 5286453 | 0, 4772550 | 0, 1516292 | 1, 1075321 |
| 50° | 0, 5985092 | 0, 5244543 | 0, 2031381 | 1, 1241924 |
| 55° | 0, 6789537 | 0, 5734258 | 0, 2669588 | 1, 1480916 |
| 60° | 0, 7746670 | 0, 6248525 | 0, 3476827 | 1, 1799440 |
| 65° | 0, 8930248 | 0, 6795041 | 0, 4526673 | 1, 2181564 |
| 70° | 1, 0460547 | 0, 7380631 | 0, 5940484 | 1, 2620741 |
| 75° | 1, 2561595 | 0, 8012428 | 0, 7944289 | 1, 3103521 |

Die

## Die VII. Art, $\gamma = 30°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel β | Bogen AG = 2, 302585c mult. mit | Weite AF = 2, 302585c mult. mit | Höhe FG = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in G = $\surd$ 2 α gc mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 1, 2824878 |
| 4° | 0, 0531095 | 0, 0530771 | 0, 0018534 | 1, 3666709 |
| 8° | 0, 1145917 | 0, 1142209 | 0, 0082797 | 1, 4777340 |
| 12° | 0, 1885154 | 0, 1870215 | 0, 0211164 | 1, 6289107 |
| 16° | 0, 2823792 | 0, 2780971 | 0, 0438241 | 1, 8465497 |
| 20° | 0, 4107379 | 0, 4001568 | 0, 0834838 | 2, 1899606 |
| 24° | 0, 6123038 | 0, 5870187 | 0, 1589917 | 2, 8410200 |
| 28° | 1, 0662974 | 0, 9950654 | 0, 3603139 | 4, 9575543 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH = 2, 302585c mult. mit | Weite AE = 2, 302585c mult. mit | Höhe EH = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in H = $\surd$ 2 α gc mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0584573 | 0, 0584016 | 0, 0025498 | 1, 2036502 |
| 10° | 0, 1110991 | 0, 1096005 | 0, 0067405 | 1, 1459142 |
| 15° | 0, 1601512 | 0, 1571603 | 0, 0199071 | 1, 1041655 |
| 20° | 0, 2072623 | 0, 2020968 | 0, 0340736 | 1, 0750698 |
| 25° | 0, 2538048 | 0, 2450965 | 0, 0518846 | 1, 0565147 |
| 30° | 0, 3010368 | 0, 2869907 | 0, 0736934 | 1, 0471396 |
| 35° | 0, 3501292 | 0, 3283948 | 0, 1060706 | 1, 0462236 |
| 40° | 0, 4028166 | 0, 3701963 | 0, 1321459 | 1, 0529101 |
| 45° | 0, 4605770 | 0, 4127817 | 0, 1711682 | 1, 0672844 |
| 50° | 0, 5258113 | 0, 4568532 | 0, 2192639 | 1, 0891319 |
| 55° | 0, 6017230 | 0, 5030653 | 0, 2794886 | 1, 1180409 |
| 60° | 0, 6929845 | 0, 5521000 | 0, 3564577 | 1, 1550250 |
| 65° | 0, 8069916 | 0, 6047426 | 0, 4575832 | 1, 1984213 |

Die

## Die VIII. Art, $\gamma = 35°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel $\beta$ | Bogen AG $= 2, 302585c$ mult. mit | Weite AF $= 2, 302585c$ mult. mit | Höhe FG $= 2, 302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $= \sqrt{2 \alpha g c}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 1, 1517744 |
| 5° | 0, 0536504 | 0, 0535931 | 0, 0023402 | 1, 2298471 |
| 10° | 0, 1164065 | 0, 1158121 | 0, 0105315 | 1, 3372699 |
| 15° | 0, 1935934 | 0, 1911693 | 0, 0272378 | 1, 4901162 |
| 20° | 0, 2952450 | 0, 2881162 | 0, 0578050 | 1, 7219160 |
| 25° | 0, 4441013 | 0, 4256416 | 0, 1147698 | 2, 1190543 |
| 30° | 0, 7134214 | 0, 6645303 | 0, 2391278 | 3, 0237457 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $= 2, 302585c$ mult. mit | Weite AE $= 2, 302585c$ mult. mit | Höhe EH $= 2, 302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $= \sqrt{2 \alpha g c}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0477456 | 0, 0477002 | 0, 0020826 | 1, 0943354 |
| 10° | 0, 0916889 | 0, 0912676 | 0, 0078183 | 1, 0523529 |
| 15° | 0, 1334123 | 0, 1320020 | 0, 0168489 | 1, 0225533 |
| 20° | 0, 1741257 | 0, 1708310 | 0, 0290916 | 1, 0030180 |
| 25° | 0, 2149125 | 0, 2085131 | 0, 0447000 | 0, 9923740 |
| 30° | 0, 2568288 | 0, 2456933 | 0, 0640548 | 0, 9894922 |
| 35° | 0, 3010101 | 0, 2829554 | 0, 0877934 | 0, 9942320 |
| 40° | 0, 3487869 | 0, 3224633 | 0, 1181088 | 1, 0062590 |
| 45° | 0, 4008361 | 0, 3608380 | 0, 1532727 | 1, 0267250 |
| 50° | 0, 4624001 | 0, 4024300 | 0, 1986624 | 1, 0521799 |
| 55° | 0, 5336408 | 0, 4457985 | 0, 2551789 | 1, 0862895 |
| 60° | 0, 6202174 | 0, 4923160 | 0, 3281968 | 1, 1279210 |
| 65° | 0, 7295507 | 0, 5418005 | 0, 4251766 | 1, 1766132 |

## Die IX. Art, $\gamma = 40^\circ$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2,302585c$ mult. mit | Weite AF $=2,302585c$ mult. mit | Höhe FG $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 1, 0374326 |
| 5° | 0, 0430066 | 0, 429653 | 0, 0018752 | 1, 0943956 |
| 10° | 0, 0919192 | 0, 0913925 | 0, 0082600 | 1, 1710300 |
| 15° | 0, 1498437 | 0, 1479439 | 0, 0207972 | 1, 2792014 |
| 20° | 0, 2220035 | 0, 2167639 | 0, 0424960 | 1, 4255286 |
| 25° | 0, 3183136 | 0, 3130740 | 0, 0793523 | 1, 6513573 |
| 30° | 0, 4613701 | 0, 4399666 | 0, 1454082 | 2, 0375785 |
| 35° | 0, 7242441 | 0, 6616722 | 0, 2866503 | 2, 9155300 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $=2,302585c$ mult mit | Weite AE $=2,302585c$ mult. mit | Höhe EH $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0391288 | 0,0390916 | 0, 0017067 | 0, 9955230 |
| 10° | 0, 0758217 | 0,0754706 | 0, 0064961 | 0, 9653785 |
| 15° | 0, 1111950 | 0, 1100055 | 0,0141523 | 0, 9449712 |
| 20° | 0, 1461942 | 0, 1433848 | 0, 0246768 | 0, 9329900 |
| 25° | 0, 1817029 | 0, 1761906 | 0, 0382654 | 0, 9286072 |
| 30° | 0, 2186288 | 0, 2089443 | 0, 0553159 | 0, 9313542 |
| 35° | 0, 2579920 | 0, 2421429 | 0,0764657 | 0, 9410210 |
| 40° | 0, 3010300 | 0, 2762872 | 0, 1026656 | 0, 9576150 |
| 45° | 0, 3493419 | 0, 3123065 | 0, 1353046 | 0,9813050 |
| 50° | 0, 4051075 | 0, 3499812 | 0, 1764195 | 1, 0123688 |
| 55° | 0, 4714427 | 0, 3903635 | 0, 2290467 | 1, 0511080 |
| 60° | 0, 5529882 | 0, 4341779 | 0, 2978215 | 1, 0977350 |
| 65° | 0, 6645322 | 0, 4856832 | 0, 3967623 | 1, 1422087 |

Die

## Die X. Art, $\gamma=45^\circ$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2, 302585c$ mult. mit | Weite AF $=2, 302585c$ mult. mit | Höhe FG $=2, 302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2\alpha gc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 9334006 |
| 5° | 0, 0344786 | 0, 0344458 | 0, 0015039 | 0, 9749070 |
| 10° | 0, 0728429 | 0, 0724819 | 0, 0065114 | 1, 0072522 |
| 15° | 0, 1170269 | 0, 1156285 | 0, 0160746 | 1, 1057013 |
| 20° | 0, 1700359 | 0, 1661841 | 0, 0320147 | 1, 2080919 |
| 25° | 0, 2369776 | 0, 2280301 | 0, 0576322 | 1, 3529484 |
| 30° | 0, 3276252 | 0, 3084355 | 0, 0984888 | 1, 5716307 |
| 35° | 0, 4643926 | 0, 4237840 | 0, 1719739 | 1, 9449118 |
| 40° | 0, 7201036 | 0, 6166532 | 0, 3276409 | 2, 7916820 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $=2, 302585c$ mult. mit | Weite AE $=2, 302585c$ mult. mit | Höhe EH $=2, 302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2\alpha gc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0319417 | 0, 0319113 | 0, 0013933 | 0, 9031358 |
| 10° | 0, 0623620 | 0, 0620714 | 0, 0053639 | 0, 8821362 |
| 15° | 0, 0920925 | 0, 0910972 | 0, 0117987 | 0, 8691170 |
| 20° | 0, 1218792 | 0, 1195053 | 0, 0207556 | 0, 8632622 |
| 25° | 0, 1524538 | 0, 1477525 | 0, 0324560 | 0, 8641030 |
| 30° | 0, 1846062 | 0, 1762720 | 0, 0473023 | 0, 8714338 |
| 35° | 0, 2192576 | 0, 2054960 | 0, 0659205 | 0, 8852698 |
| 40° | 0, 2575584 | 0, 2358821 | 0, 0892365 | 0, 9058054 |
| 45° | 0, 3010298 | 0, 2679326 | 0, 1186053 | 0, 9334008 |
| 50° | 0, 3517819 | 0, 3022204 | 0, 1560237 | 0, 9685267 |
| 55° | 0, 4128722 | 0, 3394098 | 0, 2044899 | 1, 0116744 |
| 60° | 0, 4889092 | 0, 3802644 | 0, 2686188 | 1, 0632697 |
| 65° | 0, 5973420 | 0, 4257156 | 0, 3559297 | 1, 1231789 |

## Die XI. Art, $\gamma = 50°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel β | Bogen AG =2, 302585c mult. mit | Weite AF =2, 302585c mult. mit | Höhe FG =2, 302585c mult. mit | Geschwind. in G =$\sqrt{}$ 2 α gc mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 8355528 |
| 5° | 0, 0274073 | 0, 0273815 | 0, 0011954 | 0, 8656318 |
| 10° | 0, 0573656 | 0, 0570835 | 0, 0051057 | 0, 9063780 |
| 15° | 0, 0911308 | 0, 0900483 | 0, 0124138 | 0, 9607178 |
| 20° | 0, 1305387 | 0, 1276322 | 0, 0242640 | 1, 0098510 |
| 25° | 0, 1784812 | 0, 1713176 | 0, 0426108 | 1, 1322406 |
| 30° | 0, 2399277 | 0, 2258213 | 0, 0709836 | 1, 2717609 |
| 35° | 0, 3244737 | 0, 2971267 | 0, 1164101 | 1, 4819927 |
| 40° | 0, 4542918 | 0, 4001181 | 0, 1954382 | 1, 8402029 |
| 45° | 0, 7018665 | 0, 5826493 | 0, 3626972 | 2, 6510746 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH =2, 302585c mult. mit | Weite AE =2, 302585c mult. mit | Höhe EH =2, 302585c mult. mit | Geschind. in H =$\sqrt{}$ 2 α gc mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0257800 | 0, 0257555 | 0, 0011245 | 0, 8142160 |
| 10° | 0, 0506648 | 0, 0504264 | 0, 0043725 | 0, 8003682 |
| 15° | 0, 0752853 | 0, 0739074 | 0, 0097013 | 0, 7932086 |
| 20° | 0, 1002357 | 0, 0977028 | 0, 0172040 | 0, 7922644 |
| 25° | 0, 1261289 | 0, 1216250 | 0, 0271129 | 0, 7973224 |
| 30° | 0, 1536516 | 0, 1460379 | 0, 0398215 | 0, 8083834 |
| 35° | 0, 1836331 | 0, 1713240 | 0, 0559305 | 0, 8256440 |
| 40° | 0, 2171355 | 0, 1979032 | 0, 0763254 | 0, 8494780 |
| 45° | 0, 2555934 | 0, 2262573 | 0, 1023072 | 0, 8804246 |
| 50° | 0, 3010302 | 0, 2569540 | 0, 1358067 | 0, 9191604 |
| 55° | 0, 3564224 | 0, 2906748 | 0, 1797525 | 0, 9664322 |
| 60° | 0, 4263171 | 0, 3282283 | 0, 2387011 | 1, 0229286 |
| 65° | 0, 5181433 | 0, 3706289 | 0, 3201519 | 1, 0888145 |
| 70° | 0, 6444319 | 0, 4189573 | 0, 4368269 | 1, 1633389 |

Die

## Die XII. Art, $\gamma = 55°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöh. Winkel $\beta$ | Bogen AG =2, 302585c mult. mit | Weite AF =2, 302585c mult. mit | Höhe FG =2, 302585c mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2\alpha gc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 7408247 |
| 5° | 0, 0213983 | 0, 0213779 | 0, 0009334 | 0, 7622067 |
| 10° | 0, 0444431 | 0, 0442256 | 0, 0039414 | 0, 7917494 |
| 15° | 0, 0699780 | 0, 0691552 | 0, 0094682 | 0, 8313004 |
| 20° | 0, 0991426 | 0, 0969700 | 0, 0182381 | 0, 8836870 |
| 25° | 0, 1336729 | 0, 1288718 | 0, 0314523 | 0, 9533964 |
| 30° | 0, 1763265 | 0, 1666190 | 0, 0511475 | 1, 0479615 |
| 35° | 0, 2319010 | 0, 2134901 | 0, 0810077 | 1, 1811330 |
| 40° | 0, 3097574 | 0, 2752577 | 0, 1284037 | 1, 3814570 |
| 45° | 0, 4317380 | 0, 3651912 | 0, 2108126 | 1, 7222525 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel im H | Bogen AH =2, 302585c mult. mit | Weite AE =2, 302585c mult. mit | Höhe EH =2, 302585c mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2\alpha gc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0203933 | 0, 0203739 | 0, 0008895 | 0, 7264018 |
| 10° | 0, 0403142 | 0, 0401244 | 0, 0034897 | 0, 7181402 |
| 15° | 0, 0602441 | 0, 0595819 | 0, 0078033 | 0, 7155700 |
| 20° | 0, 0806566 | 0, 0790496 | 0, 0139414 | 0, 7184620 |
| 25° | 0, 1020615 | 0, 0988251 | 0, 0221327 | 0, 7267940 |
| 30° | 0, 1250513 | 0, 1192173 | 0, 0327482 | 0, 7407330 |
| 35° | 0, 1503617 | 0, 1405638 | 0, 0463475 | 0, 7606280 |
| 40° | 0, 1789586 | 0, 1632513 | 0, 0637561 | 0, 7870175 |
| 45° | 0, 2121716 | 0, 1877385 | 0, 0861945 | 0, 8206300 |
| 50° | 0, 2519105 | 0, 2145855 | 0, 1154930 | 0, 8623730 |
| 55° | 0, 3010299 | 0, 2444873 | 0, 1544618 | 0, 9132960 |
| 60° | 0, 3639646 | 0, 2783021 | 0, 2075404 | 0, 9744630 |
| 65° | 0, 4480656 | 0, 3171356 | 0, 2821389 | 1, 0464940 |
| 70° | 0, 5659193 | 0, 3622363 | 0, 3910219 | 1, 1290330 |



Die

## Die XIII. Art, $\gamma = 60°$, auffsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel β | Bogen AG = 2, 302585c mult. mit | Weite AF = 2, 302585c mult. mit | Höhe FG = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in G = $\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 6468016 |
| 5° | 0, 0162147 | 0, 0161993 | 0, 0007083 | 0, 6615067 |
| 10° | 0, 0334581 | 0, 0333188 | 0, 0029611 | 0, 6825723 |
| 15° | 0, 0522842 | 0, 0516986 | 0, 0070358 | 0, 7111634 |
| 20° | 0, 0734341 | 0, 0718724 | 0, 0133957 | 0, 7490356 |
| 25° | 0, 0979624 | 0, 0945336 | 0, 0227823 | 0, 7988710 |
| 30° | 0, 1274665 | 0, 1207041 | 0, 0364058 | 0, 8649155 |
| 35° | 0, 2337506 | 0, 1519700 | 0, 0563244 | 0, 9542799 |
| 40° | 0, 3041291 | 0, 1910128 | 0, 0862840 | 0, 0799220 |
| 45° | 0, 4170972 | 0, 2429086 | 0, 1338378 | 1, 2687044 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH = 2, 302585c mult. mit | Weite AE = 2, 302585c mult. mit | Höhe EH = 2, 302585c mult. mit | Geschwind. in H = $\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0156312 | 0, 0156163 | 0, 0006818 | 0, 6376925 |
| 10° | 0, 0310638 | 0, 0309169 | 0, 0026961 | 0, 6337066 |
| 15° | 0, 0466607 | 0, 0461441 | 0, 0060719 | 0, 6345956 |
| 20° | 0, 0627947 | 0, 0615314 | 0, 0109235 | 0, 6403066 |
| 25° | 0, 0797814 | 0, 0773174 | 0, 0174622 | 0, 6509606 |
| 30° | 0, 0984196 | 0, 0937610 | 0, 0260221 | 0, 6668540 |
| 35° | 0, 1190448 | 0, 1111561 | 0, 0371040 | 0, 6884688 |
| 40° | 0, 1426107 | 0, 1298522 | 0, 0514500 | 0, 7164928 |
| 45° | 0, 1703152 | 0, 1503781 | 0, 0701668 | 0, 7518453 |
| 50° | 0, 2039115 | 0, 1729754 | 0, 0949366 | 0, 7956974 |
| 55° | 0, 2460716 | 0, 1986408 | 0, 1283845 | 0, 8494622 |
| 60° | 0, 3010300 | 0, 2281699 | 0, 1747359 | 0, 9147158 |
| 65° | 0, 3759460 | 0, 2627602 | 0, 2411833 | 0, 9927727 |
| 70° | 0, 4833502 | 0, 3038620 | 0, 3404118 | 1, 0840377 |

## Die XIV. Art, $\gamma = 65^{\circ}$, auffsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2{,}3025285c$ mult. mit | Weite AF $=2{,}302585c$ mult. mit | Höhe FG $=2{,}302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 5512851 |
| 5° | 0, 0117187 | 0, 0117070 | 0, 0005112 | 0, 5609070 |
| 10° | 0, 0240466 | 0, 0239293 | 0, 0021203 | 0, 5755040 |
| 15° | 0, 0377455 | 0, 0373035 | 0, 0050853 | 0, 5960807 |
| 20° | 0, 0520820 | 0, 0509764 | 0, 0093964 | 0, 6229280 |
| 25° | 0, 0688970 | 0, 0665114 | 0, 0158312 | 0, 6584890 |
| 30° | 0, 0887230 | 0, 0840973 | 0, 0249859 | 0, 7050288 |
| 25° | 0, 1129994 | 0, 1045716 | 0, 0389296 | 0, 7664982 |
| 40° | 0, 1441046 | 0, 1292490 | 0, 0569659 | 0, 8495214 |
| 45° | 0, 1863054 | 0, 1603627 | 0, 0854764 | 0, 9661480 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $=2{,}302585c$ mult. mit | Weite AE $=2{,}302585c$ mult. mit | Höhe EH $=2{,}302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0. 0114112 | 0, 0114003 | 0, 0004978 | 0, 5461681 |
| 10° | 0, 0227851 | 0, 0226769 | 0, 0019824 | 0, 5452956 |
| 15° | 0, 0343870 | 0, 0340038 | 0, 0044935 | 0, 5485785 |
| 20° | 0, 0464999 | 0, 0455561 | 0, 0081359 | 0, 5560841 |
| 25° | 0, 0574491 | 0, 0573196 | 0, 0130867 | 0, 5680356 |
| 30° | 0, 0716365 | 0, 0701040 | 0, 0196378 | 0, 5848269 |
| 35° | 0, 0875859 | 0, 0835556 | 0, 0282074 | 0, 6070419 |
| 40° | 0, 1060165 | 0, 0981774 | 0, 0394373 | 0, 6354975 |
| 45° | 0, 1279578 | 0, 1143542 | 0, 0542606 | 0, 6712930 |
| 50° | 0, 1549477 | 0, 1325883 | 0, 0741596 | 0, 7158708 |
| 55° | 0, 1893823 | 0, 1535507 | 0, 1014785 | 0, 7710695 |
| 60° | 0, 2351557 | 0, 1781447 | 0, 1400834 | 0, 8391242 |
| 65° | 0, 2990300 | 0, 2076385 | 0, 1967406 | 0, 9223862 |
| 70° | 0, 3932208 | 0, 2436838 | 0, 2837615 | 1, 0226193 |

## Die XV. Art, $\gamma = 70°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG =2,302585c mult. mit | Weite AF =2,302585c mult. mit | Höhe FG =2,302585c mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0, | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 4524817 |
| 5° | 0, 0078598 | 0, 0078523 | 0, 0003428 | 0, 4583411 |
| 10° | 0, 0160524 | 0, 0159748 | 0, 0014121 | 0, 4680321 |
| 15° | 0, 0248022 | 0, 0245172 | 0, 0033059 | 0, 4820125 |
| 20° | 0, 0343996 | 0, 0336704 | 0, 0061919 | 0, 5009739 |
| 25° | 0, 0451916 | 0, 0436409 | 0, 0103218 | 0, 5259218 |
| 30° | 0, 0577334 | 0, 0547656 | 0, 0161129 | 0, 5583894 |
| 35° | 0, 0728021 | 0, 0674744 | 0, 0242093 | 0, 6006724 |
| 40° | 0, 0916391 | 0, 0824188 | 0, 0356792 | 0, 6563971 |
| 45° | 0, 1163835 | 0, 1006623 | 0, 0523963 | 0, 7316592 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH =2, 302585c mult. mit | Weite AE =2, 302585c mult. mit | Höhe EH =2, 302585c mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0077202 | 0, 0077128 | 0, 0003367 | 0, 4501940 |
| 10° | 0, 0154804 | 0, 0154066 | 0, 0013496 | 0, 4513458 |
| 15° | 0, 0234622 | 0, 0231992 | 0, 0030772 | 0, 4559594 |
| 20° | 0, 0318661 | 0, 0312141 | 0, 0056044 | 0, 4641756 |
| 25° | 0, 0409293 | 0, 0395884 | 0, 0090728 | 0, 4762782 |
| 30° | 0, 0509544 | 0, 0484817 | 0, 0137018 | 0, 4927122 |
| 35° | 0, 0623324 | 0, 0580778 | 0, 0198152 | 0, 5134171 |
| 40° | 0, 0756415 | 0, 0686366 | 0, 0279173 | 0, 5436588 |
| 45° | 0, 0916666 | 0, 0804482 | 0, 0387406 | 0, 5758147 |
| 50° | 0, 1116864 | 0, 0941931 | 0, 0535007 | 0, 6189992 |
| 55° | 0, 1376862 | 0, 1100197 | 0, 0741453 | 0, 6732350 |
| 60° | 0. 1730051 | 0, 1289965 | 0, 1039323 | 0, 7415298 |
| 65° | 0, 2236709 | 0, 1523914 | 0, 1488734 | 0, 8275940 |
| 70° | 0, 3010300 | 0, 1819954 | 0, 2203438 | 0, 9354798 |

## Die XVI. Art, $\gamma = 75^\circ$, aufsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG $= 2,302585c$ mult. mit | Weite AF $= 2,302585c$ mult. mit | Höhe FG $= 2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $= \sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 3487142 |
| 5° | 0, 0046511 | 0, 0046467 | 0, 0002028 | 0, 3519240 |
| 10° | 0, 0094624 | 0, 0094168 | 0, 0008308 | 0, 3579723 |
| 15° | 0, 0145650 | 0, 0143984 | 0, 0019352 | 0, 2671204 |
| 20° | 0, 0200958 | 0, 0196732 | 0, 0035983 | 0, 3797799 |
| 25° | 0, 0262704 | 0, 0253778 | 0, 0059612 | 0, 3965786 |
| 30° | 0, 0333572 | 0, 0316639 | 0, 0092335 | 0, 4184240 |
| 35° | 0, 0417541 | 0, 0387449 | 0, 0137446 | 0, 4466655 |
| 40° | 0, 0420689 | 0, 0469274 | 0, 0200232 | 0, 4833373 |
| 45° | 0, 0552863 | 0, 0566723 | 0, 0289527 | 0, 5316527 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $= 2,302585c$ mult. mit | Weite AE $= 2,302585c$ mult. mit | Höhe EH $= 2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $= \sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0046018 | 0, 0045674 | 0, 0002007 | 0, 3481961 |
| 10° | 0, 0092605 | 0, 0092162 | 0, 0008088 | 0, 3503387 |
| 15° | 0, 0140873 | 0, 0139286 | 0, 0018535 | 0, 3552077 |
| 20° | 0, 0192069 | 0, 0189112 | 0, 0033930 | 0, 3629782 |
| 25° | 0, 0247714 | 0, 0240521 | 0, 0055224 | 0, 3739455 |
| 30° | 0, 0339768 | 0, 0295563 | 0, 0083877 | 0, 3885535 |
| 35° | 0, 0410895 | 0, 0355551 | 0, 0122093 | 0, 4074362 |
| 40° | 0, 0494892 | 0, 0423190 | 0, 0173228 | 0, 4314905 |
| 45° | 0, 0597424 | 0, 0479784 | 0, 0242497 | 0, 4619698 |
| 50° | 0, 0727337 | 0, 0567502 | 0, 0338225 | 0, 5006514 |
| 55° | 0, 0899171 | 0, 0724378 | 0, 0474550 | 0, 5500725 |
| 60° | 0, 1138149 | 0, 0852780 | 0, 0676102 | 0, 6138925 |
| 65° | 0, 1491644 | 0, 1016005 | 0, 0989655 | 0, 6973318 |
| 70° | 0, 2054699 | 0, 1231477 | 0, 1509850 | 0, 8075756 |

## Die XVII. Art, $\gamma = 80°$, aufsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG $= 2,302585c$ mult. mit | Weite AF $= 2,302585c$ mult. mit | Höhe FG $= 2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $= \sqrt{2\alpha gc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 2387190 |
| 5° | 0, 0021734 | 0, 0021713 | 0, 0000948 | 0, 2402313 |
| 10° | 0, 0044087 | 0, 0043875 | 0, 0003865 | 0, 2436351 |
| 15° | 0, 0067622 | 0, 0066852 | 0, 0008958 | 0, 2490717 |
| 20° | 0, 0093019 | 0, 0091073 | 0, 0016595 | 0, 2567747 |
| 25° | 0, 0121136 | 0, 0117049 | 0, 0027354 | 0, 2670964 |
| 30° | 0, 0153139 | 0, 0145436 | 0, 0042131 | 0, 2805520 |
| 35° | 0, 0190688 | 0, 0177103 | 0, 0062305 | 0, 2978891 |
| 40° | 0, 0235676 | 0, 0212794 | 0, 0089692 | 0, 3201968 |
| 45° | 0, 0293820 | 0, 0255662 | 0, 0128973 | 0, 3492143 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $= 2,302585c$ mult. mit | Weite AE $= 2,302585c$ mult. mit | Höhe EH $= 2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $= \sqrt{2\alpha gc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0021295 | 0, 0021275 | 0, 0000929 | 0, 2390364 |
| 10° | 0, 0043303 | 0, 0043094 | 0, 0003801 | 0, 2411867 |
| 15° | 0, 0066246 | 0, 0065493 | 0, 0008767 | 0, 2452527 |
| 20° | 0, 0090227 | 0, 0088364 | 0, 0015978 | 0, 2514188 |
| 25° | 0, 0118007 | 0, 0114020 | 0, 0026609 | 0, 2598477 |
| 30° | 0, 0148081 | 0, 0140696 | 0, 0040496 | 0, 2709944 |
| 35° | 0, 0182825 | 0, 0169989 | 0, 0059164 | 0, 2849635 |
| 40° | 0, 0224231 | 0, 0202841 | 0, 0084371 | 0, 3049506 |
| 45° | 0, 0275322 | 0, 0240510 | 0, 0118887 | 0, 3270724 |
| 50° | 0, 0340928 | 0, 0284832 | 0, 0167257 | 0, 3570920 |
| 55° | 0, 0429195 | 0, 0338566 | 0, 0237348 | 0, 3961357 |
| 60° | 0, 0554772 | 0, 0403038 | 0, 0343259 | 0, 4479054 |
| 65° | 0, 0746528 | 0, 0491582 | 0, 0513348 | 0, 5183466 |
| 70° | 0, 1085932 | 0, 0621465 | 0, 0826719 | 0, 6159517 |

## Die XVIII. Art, $\gamma = 85^\circ$, aufsteigender Bogen.

| Erhöhungs-Winkel $\beta$ | Bogen AG $=2,302585c$ mult. mit | Weite AF $=2,302585c$ mult. mit | Höhe FG $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in G $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 0000000 | 0, 1220575 |
| 5° | 0, 0005672 | 0, 0005666 | 0, 0000247 | 0, 1226038 |
| 10° | 0, 0011484 | 0, 0011428 | 0, 0001005 | 0, 1241044 |
| 15° | 0, 0017577 | 0, 0017412 | 0, 0002324 | 0, 1266192 |
| 20° | 0, 0024126 | 0, 0023658 | 0, 0004293 | 0, 1302522 |
| 25° | 0, 0031343 | 0, 0030326 | 0, 0007055 | 0, 1351623 |
| 30° | 0, 0039517 | 0, 0037576 | 0, 0010829 | 0, 1415826 |
| 35° | 0, 0049049 | 0, 0045615 | 0, 0015951 | 0, 1500212 |
| 40° | 0, 0060536 | 0, 0054728 | 0, 0022944 | 0, 1604492 |
| 45° | 0, 0074906 | 0, 0065322 | 0, 0032652 | 0, 1741105 |

## Niedersteigender Bogen.

| Winkel in H | Bogen AH $=2,302585c$ mult. mit | Weite AE $=2,302585c$ mult. mit | Höhe EH $=2,302585c$ mult. mit | Geschwind. in H $=\sqrt{2agc}$ mult. mit |
|---|---|---|---|---|
| 5° | 0, 0005664 | 0, 0005658 | 0, 0000247 | 0, 1224439 |
| 10° | 0, 0011454 | 0, 0011398 | 0, 0001003 | 0, 1237770 |
| 15° | 0, 0017507 | 0, 0017307 | 0, 0002313 | 0, 1261092 |
| 20° | 0, 0023994 | 0, 0023494 | 0, 0004263 | 0, 1295326 |
| 25° | 0, 0031119 | 0, 0030076 | 0, 0006990 | 0, 1341940 |
| 30° | 0, 0039161 | 0, 0037209 | 0, 0010703 | 0, 1403059 |
| 35° | 0, 0048501 | 0, 0045086 | 0, 0015721 | 0, 1481730 |
| 40° | 0, 0059705 | 0, 0053973 | 0, 0022541 | 0, 1582433 |
| 45° | 0, 0073636 | 0, 0064244 | 0, 0031203 | 0, 1711573 |
| 50° | 0, 0091701 | 0, 0076448 | 0, 0044522 | 0, 1878936 |
| 55° | 0, 0116319 | 0, 0091434 | 0, 0064052 | 0, 2099701 |
| 60° | 0, 0151968 | 0, 0110588 | 0, 0094118 | 0, 2398813 |
| 65° | 0, 0187839 | 0, 0127151 | 0, 0125936 | 0, 2819840 |
| 70° | 0, 0285049 | 0, 0164352 | 0, 0215746 | 0, 3445565 |

# Hülfs-Tabelle.

| φ | Werthe von P | φ | Werthe von P | φ | Werthe von P |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000000 | 30° | 0, 6079863 | 60° | 2, 3903300 |
| 1° | 0, 0174559 | 31° | 0, 6352732 | 61° | 2, 5367760 |
| 2° | 0, 0349278 | 32° | 0, 6634325 | 62° | 2, 697518 |
| 3° | 0, 0524318 | 33° | 0, 6925287 | 63° | 2, 874904 |
| 4° | 0, 0699837 | 34° | 0, 7226311 | 64° | 3, 071501 |
| 5° | 0, 0876001 | 35° | 0, 7538161 | 65° | 3, 290396 |
| 6° | 0, 1052974 | 36° | 0, 7861656 | 66° | 3, 535320 |
| 7° | 0, 1230926 | 37° | 0, 8197699 | 67° | 3, 810834 |
| 8° | 0, 1410022 | 38° | 0, 8547266 | 68° | 5, 122549 |
| 9° | 0, 1590442 | 39° | 0, 8911439 | 69° | 4, 477441 |
| 10° | 0, 1772365 | 40° | 0, 9291380 | 70° | 4, 884250 |
| 11° | 0, 1955976 | 41° | 0, 9688398 | 71° | 5, 354075 |
| 12° | 0, 2141464 | 42° | 1, 0103900 | 72° | 5, 901161 |
| 13° | 0, 2329030 | 43° | 1, 0539469 | 73° | 6, 544048 |
| 14° | 0, 2518877 | 44° | 1, 0996840 | 74° | 7, 307220 |
| 15° | 0, 2711218 | 45° | 1, 1477934 | 75° | 8, 223570 |
| 16° | 0, 2906277 | 46° | 1, 1984896 | 76° | 9, 338073 |
| 17° | 0, 3104288 | 47° | 1, 2520116 | 77° | 10, 713657 |
| 18° | 0, 3305495 | 48° | 1, 3086253 | 78° | 12, 440411 |
| 19° | 0, 3510153 | 49° | 1, 3686303 | 79° | 14, 651100 |
| 20° | 0, 3718537 | 50° | 1, 4323614 | 80° | 17, 54763 |
| 21° | 0, 3930932 | 51° | 1, 5001970 | 81° | 21, 45123 |
| 22° | 0, 4147637 | 52° | 1, 5725657 | 82° | 26, 89318 |
| 23° | 0, 4368974 | 53° | 1, 6499519 | 83° | 34, 81136 |
| 24° | 0, 4595290 | 54° | 1, 7329189 | 84° | 46, 93522 |
| 25° | 0, 4826944 | 55° | 1, 8220670 | 85° | 67, 12291 |
| 26° | 0, 5064324 | 56° | 1, 9181512 | 86° | 104, 1815 |
| 27° | 0, 5307845 | 57° | 2, 0219938 | 87° | 184, 1162 |
| 28° | 0, 5557952 | 58° | 2, 1345596 | 88° | 412, 2915 |
| 29° | 0, 5815120 | 59° | 2, 2569691 | 89° | 1643, 690 |
| 30° | 0, 6079863 | 60° | 2, 3903300 | 89½° | 6568, 250 |

§. 24.

Unter diesen Tafeln ist die XII. diejenige, welche Herr Euler als ein Muster berechnet hat. Ich habe mir die Freyheit genommen, die Einrichtung derselben in einigen zufälligen Stücken ein wenig zu ändern. Jede Tafel bestehet aus zweyen Theilen, wovon der erste für den aufsteigenden, der zweyte für den heruntersteigenden Ast berechnet ist. Ueberdem hat jede Tafel fünf Colummen, und hievon enthält die erste Colummе im ersten Theil der Tafel den Erhöhungswinkel, im zweyten Theil aber den Winkel, unter welchem die Kugel an den Gegenstand, den sie trift, anschlägt. Die zweyte Colummе enthält in beyden Theilen die Länge des Bogens von der höchsten Spitze angerechnet. Die dritte Colummе enthält im ersten Theil die Weite des Stücks von der Scheitellinie durch die höchste Spitze der Bahn der Kugel, und im zweyten Theil die Weite dieser Vertikallinie von dem Ort, an welchem die Kugel anschlägt. Die vierte enthält die Höhen des Wurfs, und endlich die fünfte die Geschwindigkeiten. Herr Euler hat noch die sechste Colummе, welche die Zeit enthält, in welcher die Kugel ihre Bahn durchlaufen hat. Diese habe ich theils wegen Kürze der Zeit, theils aus der im 21sten §. angeführten Ursache weggelassen, und das ist der eine Punkt in welchem ich vom Hrn. Euler abgegangen bin. Ferner hat Herr Euler die Differenzen der Glieder mit in seine Tafeln gebracht, auch diese habe ich weggelassen, und das aus keiner andern Ursache, als weil ich dadurch die Tafeln habe in einen engern Raum bringen können. So habe ich auch den Erhöhungswinkel nie grösser als von 45° Grad angenommen weil in Kriege keine grösse Erhöhungen ausser zuweilen beym Bombenwerfen gewöhnlich sind. Man wird dieses wegen der Kürze der Zeit und des Raums, worinn ich eingeschränkt gewesen bin, entschuldigen, und dieserwegen meine Tafeln keiner Unvollständigkeit beschuldigen, denn ich erkläre sie hiemit selbst für solche, die noch nicht ganz volständig sind. Für den ersten Versuch war die von mir zu Stande gebrachte Arbeit hinreichend. Ich nehme zwar mit dieser Probe-Schrift von der Academie, nicht aber von den Wissenschaften, und am allerwenigsten von der Mathematik Abschied. In Zukunft werde ich bey mehrerer Müsse meine Arbeit noch verbessern, und vollständiger machen. Und dann könte es leicht seyn, daß ich nochmahl als Schriftsteller erschiene, wenn man meine ersten Bemühungen

hungen einiges Beyfalls würdig halten sollte. Wie man diese Tafeln in der ausübenden Artillerie gebrauchen müsse. Das werden folgende Aufgaben zeigen.

§. 25.

## I. Aufgabe.

Die Stärke der Ladung und der Erhöhungswinkel nebst der Länge, und Kaliber des Stücks und der Kugel sind gegeben; man will wissen, zu welcher von den im §. 30. festgesetzten Arten die Bahn gehöre, in welcher die Kugel foregehet.

### Regeln.

I) Aus dem gegebenen Kaliber der Kugel suche man ihre Schwere nach den bekannten Regeln (S. Struensee Anfangsgr. der Art. §. 57. u. f. ingleichen §. 191. u. f.)

II) Aus der Beschaffenheit, und dem Gewicht des Pulvers, welches zur Ladung gebraucht worden, und dem Kaliberund Länge des Stücks suche man die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel zur Mündung des Stücks herausgetrieben wird. Und dies entweder blos durch Hülfe der Theorie, (S. Robins Artill. nebst Hr. Eulers Anm. 1 Cap.) oder nachdem man vorher mit dem Stück und derselben Art des Pulvers Probschüsse gethan, berichtige man dadurch das Resultat, welches durch die bisher noch nicht zur grösten Volkommenheit gebrachte Theorie gefunden worden.

III) Ist nun die der gefundenen Geschwindigkeit zugehörige Höhe $= b$, und der Erhöhungswinkel $= \beta$, so suche man $n$ aus der Formul $n = \frac{\frac{1}{2} ac \, sec \beta^2}{b} + B$ (§. 17.)

IV) Man sehe in der Tabelle des 23sten §. nach, ob man diesen Werth von $n$ daselbst antrift. Sollte dieses seyn, so zeiget der dabey stehende Winkel $\gamma$, zu welcher Art die gesuchte Bahn der Kugel gehöre, und eben dieser Winkel ist der Asymtotenwinkel. Findet sich aber der gefundene Werth von $n$ in der Tabelle des 23sten §. nicht, so zeigen die Werthe des Winkeis $\gamma$, welche bey der nechst

grössern

grössern und nechst kleinern Zahl in der Tabelle stehen, die beyden Arten an, zwischen welchen die gesuchte Bahn der Kugel fällt. Will man in diesem Fall den Asymtotenwinkel für die gesuchte Bahn der Kugel genauer haben, so sucht man in der Hülfstabelle die Werthe von P nach, und nimt diejenige Zahl davon heraus, welche der gefundenen Zahl $n$ am nechsten komt. Der dabey stehende Winkel ist sodann der Asymtotenwinkel in Graden ausgedruckt, den man noch genauer in Minuten und Secunden durch die bey den Logarithmen und andern ähnlichen Rechnungen gewöhnliche Interpolation suchen kan.

## I. Exempel.

Eine 64 Pfund schwere Bombe, deren Durchmesser $\frac{1}{2}$ Fus werde unter einem Winkel von 45° mit einer solchen Ladung Pulver geworfen, daß sie mit einer Geschwindigkeit von 485, 716418 Rheinl. Fus in einer Secunde aus dem Mörser geworfen, man soll die Beschaffenheit ihrer Bahn suchen. Weil hier um Weitläuftigkeit zu vermeiden, das schon als bekannt angenommen worden, was man nach der I. und II. Regel dieses §. erst suchen müste, so komt es nur noch nach der III. auf die Anwendung der Formul $n = \frac{\frac{1}{2}\alpha c \sec \beta^2}{b} + B$ an. In derselben ist eigentlich $\alpha = 1 - \frac{\Pi}{M}$ § 4. Aber $\frac{\Pi}{M}$ ist ein sehr kleiner Bruch, daher man ihn füglich aus der acht lassen, und dieserwegen, um Weitläuftigkeit in der Rechnung zu vermeiden, $\alpha = 1$ setzen kan. Also wird $n = \frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b} + B$, und man mus vor allen Dingen den Werth von $c$ suchen, welcher nach dem 10ten §. $= 707 \frac{e^3}{\delta\delta}$, wenn $\delta$ den Durchmesser der Bombe bedeutet, und $e^3$ den körperlichen Inhalt einer mit der Bombe gleich schweren Menge Wasser. Wiegt nun ein Cubik-Fus Wasser ohngefehr 70 ℔, so ist der körperliche Inhalt einer mit der Bombe gleich schweren Menge Wasser $= \frac{64}{70}$ Cub. F. oder beynahe $= \frac{9}{10}$ Cub. F. $= e^3$,

$= e^3$, ferner ist $\delta = \frac{1}{2}$, also $\frac{e^3}{\delta\delta} = \frac{18}{5}$, und $c = 707 \times \frac{18}{5} = 2545$, 2 folglich $\frac{1}{2}c = 1272, 6$. Um die der gegebenen Geschwindigkeit der Bombe zugehörige Höhe zu haben, mus man sich erinnern, wenn $g$ die Höhe bedeutet, aus welcher ein schwerer Körper in der ersten Secunde fält, und $b$ die der Geschwindigkeit $h$ zugehörige Höhe ist, daß $h = \sqrt{4gb}$ sey, folglich $hh = 4gb$, und also $b = \frac{hh}{4g}$. Aus der Lehre von der Schwere ist bekannt, daß $g = 15, 625$ Rheinl. Fus sey, daher mus man das Quadrat der Geschwindigkeit mit dieser Zahl viermahl genommen dividiren um die Höhe zu haben, aus welcher ein schwerer Körper im leeren Raum fallen müste, um dieselbe Geschwindigkeit zu erlangen. Diese und die folgende Rechnung um den Werth von $\frac{\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2}{b}$ zu finden, kan man bequem durch Hülfe der Logarithmen anstellen. Denn in dem gegebenen Exempel ist $\beta = 45°$, und $h = 485, 716418$.

| | |
|---|---|
| also $lh = 2,6863827$ | $l\,15,625 = 1,1938200$ |
| $lhh = 2\,lh = 5,3727654$ | $l4 = 0,6020600$ |
| $l4g = 1,7958800$ | $l4g = 1,7958800$ |
| $l\frac{hh}{4g} = lb = 3,5768854$ | $l\,sec\,\beta = 10,1505150$ |
| | $l\,sec\,\beta^2 = 2\,l\,sec\,\beta = 20,3010300$ |

Weiter ist $l\frac{1}{2}c = 3,1046919$
$l\,sec\,\beta^2 = 20,3010300$
$l\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2 = 23,4057219$
$lb = 3,5768854$

$$\text{Also } l\frac{\frac{1}{2}\alpha c\,sec\,\beta^2}{b} = 19,8288365$$

Um die zugehörige Zahl zu finden ist zu merken, daß in der Formul der Radius des Cirkels oder Sinus totus $= 1$ sey, der aber in der Logarithmen Tafel $= 10000000000$ angenommen wird. Deswegen mus man jedesmahl von dem Logarithmo der Tafeln 10 subtra-

subtrahiren, oder welches einerley ist, die Zahl, welche die trigonometrische Linie ausdruckt, mit 10000000000 dividiren. Weil nun in unsrer Formul mit $sec\beta^2$ multiplicirt ist, so mus vom gefundenen Log. 20 subtrahirt, oder welches einerley, die Zahl, welche dem Log. respondirt, mit $10000000000^2$, dividirt werden. Man subtrahire erstlich 16 von dem gefundenen Logarithmo, so behält man 3,8288365, und suche die zugehörige Zahl, die man alsdann noch mit 10000 dividiren mus. Nun findet man auf dem gewöhnlichen Wege 3,8288365 $= l\,6742,741$, also ist $\frac{\frac{1}{2} c\, sec\beta^2}{b} = 0,6742741$. Den Werth von $B = \frac{1}{2}\, tang\, \beta\; sec\, \beta + \frac{1}{2}\, l\; tang\, (45 + \frac{1}{2}\beta)$ findet man in der Hülfstabelle S. 44. es ist dies nemlich der Werth von P, wenn $\varphi = 45°$. Man bringe also in eine Summe

$$\frac{\frac{1}{2} c\, sec\beta^2}{b} = 0,6742741$$

$$B = \underline{1,1477934}$$

$$\text{so wird } n = 1,8220675$$

Schlägt man nun die Tabelle des 23sten §. nach, so findet man diese Zahl bey dem Asymtotenwinkel von 55°, daß also die Bahn der Bombe zur zwölften Art gehöret.

## II. Exempel.

Herr Robins bringt im 7ten Saz des 1sten Cap. seiner Artillerie aus seiner Theorie und den damit verbundenen Versuchen heraus, daß eine bleyerne Kugel von ¾ Zoll im Durchmesser und $1\frac{1}{3}$ Unzen Avoir du poise Gewicht, wenn dieselbe mit dem halben Gewicht Pulver, aus einem Lauf der 45 Zoll lang ist, herausgeschossen wird, eine solche Geschwindigkeit erhalte, mit welcher sie 1700 Fus in einer Secunde zurück legen würde. Will man nun wissen, wenn die Kugel unter einem Winkel von 45° geschossen wird, zu welcher Art ihre Bahn gehöre, so stellet man folgende Rechnung an. Man nehme mit dem Hrn. Euler an (Robins Artill. 2. Cap. 2. Saz. 1. Anm. S. 497.) das Bley sey 11, 350 mahl schwerer als Wasser. Sezt man nun voraus, daß Hr. Robins den Kaliber der Musketen Kugel nebst ihrem Gewicht genau genug angegeben habe; so wird aus der Proportion

tion 1000; 11350 = $\frac{27}{64}$ Cubik Zoll: vierten Zahl, für den Würfel des Durchmessers einer Wasser Kugel, von $\frac{1}{12}$ ℔ Avoir du poise Gewicht 4, 788 Cub. Zoll gefunden. Diese Zahl nach dem Verhältniß 300 : 157 vermindert, giebt 2, 506 Cub. Zoll für die Grösse einer solchen Wasser-Kugel, deren Gewicht $\frac{1}{12}$ ℔ Avoir du poise ist, woraus nach der Proportion 2, 506 : 1728 = $\frac{1}{12}$ ℔ : vierten Zahl für das Gewicht eines Cubik-Fusses Wasser $57\frac{1}{2}$ ℔ Avoir du poise gefunden wird. Ferner sind $\frac{3}{4}$ Zoll soviel, als $\frac{3}{48}$ Fus, daß also $\delta = \frac{3}{48}$ Fus, und $\delta\delta = \frac{9}{2304}$. Weil nun $57,5 : \frac{1}{12} = 1 : \frac{1}{12 \times 57,5}$, so ist $e^3 = \frac{1}{12 \times 57,5}$ Cub. Schuh, folglich $\frac{e^3}{\delta\delta} = \frac{2304}{9 \times 12 \times 57,5}$, und $c = \frac{707 \times 2304}{9 \times 12 \times 57,5}$. Nun giebt die Rechnung

| | |
|---|---|
| $l\,9 = 0,9542425$ | $l\,707 = 2,8494194$ |
| $l\,12 = 1,0791812$ | $l\,2304 = 3,3624825$ |
| $l\,57,5 = 1,7596678$ | $6,2119019$ |
| $3,7930915$ | $-\ 3,7930915$ |
| | $lc = 2,4188104$ |
| | $l\,2 = 0,3010300$ |
| | $l\tfrac{1}{2}c = 2,1177804$ |

Im vorigen Exempel war $g = 15,615$ Rheinl. Fus. Weil aber in diesem und den folgenden Exempeln Engl. Maas gebraucht wird, so mus man diese Zahl nach dem Verhältnis 97 : 100, als des Engl. zum Rheinl. Masse vermehren, so wird $g = 16,108$ und $4g = 64,432$. Man setzt also weiter $b = 1700$, und stellet folgende Rechnung an:

| | |
|---|---|
| $lb = 3,2304489$ | $l\tfrac{1}{2}c = 2,1177804$ |
| $lbb = 6,4608978$ | $l\,sec\,\beta^2 = 20,3010300$ |
| $l4g = 1,8091016$ | $l\tfrac{1}{2}c\,sec\,\beta^2 = 22,4188104$ |
| $lb = 4,6517962$ | $lb = 4,6517962$ |
| | $l\frac{\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2}{b} = 17,7670142$ |

Also

$$\text{Also ist } \frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b} = 0,0058481$$

Da nun $B = 1,1477934$

so wird $n = 1,1536415$

Diese Zahl trift man in der Tabelle des 23sten §. nicht an. Indessen siehet man gleich, daß die Bahn der Kugel der X. Art am nechsten komme, deren Asymtoten Winkel 45° ist. Aus der Hülfstabelle findet man indessen den Asymtoten-Winkel der gesuchten Bahn der Musketen Kugel genauer auf diese Art:

Wenn $\varphi = 46°$ so ist $P = 1,1984896$

und wenn $\varphi = 45°$ so ist $P = 1,1477934$

Die Differenz ist $= 0,0506962$

Wenn man nun schliest $506962 : 58481 = 60$ : vierten Zahl so findet man 7′, daß also der Asymtoten-Winkel 45° 7′ gros ist.

## III. Exempel.

Wird eben die Kugel unter einem Winkel von 8° mit einer Geschwindigkeit von 700 Engl. Schuhen geschossen, so bleibt $c$ ungeändert, es wird aber $\beta = 8°$, und $h = 700$. Dies giebt

| | |
|---|---|
| $lh = 2,8450980$ | $l \frac{1}{2} c = 2,1177804$ |
| $lhh = 5,6901960$ | $l \sec \beta^2 = 20,0084944$ |
| $l4g = 1,8091016$ | $l \frac{1}{2} c \sec \beta^2 = 22,1262748$ |
| $lb = 3,8810944$ | $lb = 3,8810944$ |
| | $l \frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b} = 18,2451804$ |

$$\text{Also wird } \frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b} = 0,0175865$$

und weil $B = 0,1410022$

so ist $n = 0,1585887$

Deswegen komt die Bahn der Kugel der III. Art am nechsten, weil der Asymtoten-Winkel beynahe 9° gros ist.

# IV. Exempel.

Herr Robins schliest aus seiner mit Versuchen verbundenen Theorie (Artill. 2. Cap. 4. Satz 543 S. der Uebers.) daß eine 24pfündige Kanon-Kugel, wann dieselbe aus einem Stück, dessen Seele 10 Schuh lang, mit 16 ℔ Pulver geschossen wird, dadurch eine Geschwindigkeit von 1650 Schuhen erhalte. Wenn nun die Kanone unter einem Winkel von 45° gerichtet ist, so frägt sich, zu welcher Art die Bahn der Kugel werde zu rechnen seyn? Vor allen Dingen berechne man den Kaliber der Kugel, welches so geschehen kan. Nach Hr. Robins (S. das II. Exempel) ist $\frac{3}{4}$ Zoll Engl. Maas, oder $\frac{3}{48}$ Fus der Kaliber einer bleyernen Kugel von $\frac{1}{12}$ ℔. Also schliesse man

$\frac{1}{12}$ ℔ : 24 ℔ $= \frac{27}{110592} : \frac{27 \times 24 \times 12}{110592}$, so drücken die beyden letzten Zahlen die Würfel der Kaliber zweyer bleyernen Kugeln aus, davon die erste $\frac{1}{12}$ ℔, die andre aber 24 ℔ wiegt. Nun ist das Verhältnis der Dichtigkeit des Eisens und des Bleyes = 7820 : 11350 (a. a. O. S. 497). Daher giebt die Proportion 7820 : 11350 = $\frac{27 \times 24 \times 12}{110592} : \frac{11350 \times 27 \times 24 \times 12}{110592 \times 7820}$ den Würfel des Durchmessers einer 24pfündigen eisernen Kugel, welcher also $= \frac{1135 \times 27}{768 \times 391}$. Nun findet man

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l\,1135$ = | 3, 0549959 | $l\,768$ = | 2, 8853612 |
| $l\,27$ = | 1, 4313638 | $l\,391$ = | 2, 5921768 |
| $l\,1135 \times 72$ = | 4, 4863597 | $l\,768 \times 391$ = | 5, 4775380 |
| man divid. durch | 3 | man divid. mit | 3 |
| zur Char. add. man 4 + | 1, 4954532 | | 1, 8258460 |
| und subtrahire | 1, 8258460 | | |

und suche die dem Log. 3, 6696072 zugehörige Zahl. Diese ist 4673, 1, welche durch 10000 dividirt den Kaliber 0, 467 Engl. Fus giebt. Also ist $\delta = 0,467$, nnd $\delta\delta = 0,218089$. Weiter giebt die Proportion 57, 5 ℔ : 24 ℔ = 1 Cubik Fus : $\frac{24}{57,5}$ Cub. Fus, den

Werth

Werth $e^3 = \frac{24}{57,5}$, $\frac{e^3}{\delta\delta} = \frac{24}{57,5 \times 0,218089}$, und $c = \frac{707 \times 24}{57,5 \times 0,218089}$. Also giebt die Rechnung

| | |
|---|---|
| $l\,707 = 2,\,8494194$ | $l\,57,5 = 1,\,7596678$ |
| $l\,24 = 1,\,3802112$ | $l\,218,089 = 2,\,3386338$ |
| $l\,707 \times 24 = 4,\,2296306$ | $4,\,0983016$ |
| Man subtrahire $1,\,0983016$ | wo von der Charakteristik 3 abgehet. |
| so ist $lc = 3,\,1313290$ | |
| $l2 = 0,\,3010300$ | |
| $l\tfrac{1}{2}c = 2,\,8302990$ | $lb = 3,\,2174839$ |
| $l\,sec\,\beta^2 = 20,\,3010300$ | $lbb = 6,\,4349678$ |
| $l\tfrac{1}{2}c\,sec\,\beta^2 = 23,\,1313290$ | $l4g = 1,\,8091016$ |
| $lb = 4,\,6258662$ | $lb = 4,\,6258662$ |
| $l\frac{\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2}{b} = 18,\,5054628$ | |

$$\frac{\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2}{b} = 0,\,0320231$$

$$B = 1,\,1477934$$

$$n = 1,\,1798165$$

Also komt die Bahn der Kugel der X. Art am nechsten, und der Asymtoten-Winkel fällt zwischen 45° und 46°.

## V. Exempel.

Wenn eben die Kugel aus eben dem Stück mit einer Ladung von 12 ℔ Pulver geschossen wird, so beträgt ihre erste Geschwindigkeit 1490 Engl. Schuh in einer Secunde. (Robins Art. S. 543.) Ist also wie vorhin $\beta = 45°$, so giebt die Rechnung folgendes

$$l\tfrac{1}{2}c = 1,\ 8302990 \qquad lb = 3,\ 1731863$$
$$l\sec\beta^2 = 20,\ 3010300 \qquad lbb = 6,\ 3463726$$
$$l\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2 = 23,\ 1313290 \qquad l4g = 1,\ 8091016$$
$$lb = 4,\ 5372710 \qquad lb = 4,\ 5372710$$
$$l\frac{\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2}{b} = 18,\ 5940580$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2}{b} = 0,\ 0392697$$
$$B = 1,\ 1477934$$
Also $n = 1,\ 1870631$

die Bahn der Kugel komt, also noch der X Art am nechsten, und der Asymtoten-Winkel ist beynahe $= 46^\circ$.

## VI. Exempel.

Ist eben dieselbe Kanone, mit eben der Ladung, wie im vorigen Exempel horizontal gerichtet, so wird $\beta = 0^\circ$, und man findet

$$l\tfrac{1}{2}c = 2,\ 8302990$$
$$l\sec\beta^2 = 20,\ 0000000$$
$$l\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2 = 22,\ 8302990$$
$$lb = 4,\ 5372710$$
$$l\frac{\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2}{b} = 18,\ 2930280$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2}{b} = 0,\ 0196349 = n, \text{ weil } B = 0.$$

Also komt die Bahn der Kugel der ersten Art am nechsten, und der Asymtoten-Winkel ist etwas über $1^\circ$ groß.

§. 26.

## II. Aufgabe.

**Die Länge und der Erhöhungs-Winkel des Stücks nebst der Schwere der Kugel und Stärke der Ladung sind gegeben,**

gegeben, man hat nach der vorigen Aufgabe befunden, daß die Bahn, in welcher die Kugel fortgehet, zu einer von den Hauptarten des §. 23. gehöre: man wird verlanget, man soll die Schusweite finden, wenn vorausgesetzt wird, daß der Schus auf ebenem Felde geschehen sey.

## Regeln.

I. Man schlage die Tabelle nach, welche für diejenige Hauptart berechnet ist, zu welcher die Bahn der Kugel gehöret. Man suche in der ersten Columne den gegebenen Erhöhungs-Winkel im aufsteigenden Bogen, so uns die in der fünften Columme gegen überstehende Zahl, wenn sie mit $\sqrt{2gc}$ multipliciret wird, die Geschwindigkeit geben, welche der Kugel von der Ladung mitgetheilt worden. Um zu prüfen, ob man nach der vorigen Aufgabe richtig gerechnet habe, stelle man diese Rechnung an, und versuche ob solches zutrift.

II. Man suche ein vor allemahl das Produckt 2, 302585$c$, oder auch nur den Logarithmum desselben, weil man die ganze Rechnung bequem mit den Logarithmen anstellen kan.

III. Die dem Erhöhungs-Winkel gegen überstehende Zahl in der dritten Columme multiplicire man mit 2, 302585$c$, so hat man das Stück AF der Schußweite.

IV. Die eben diesem Erhöhungs-Winkel gegen überstehende Zahl in der vierten Columme giebt, wenn sie mit 2, 302585$c$ multiplicirt wird, die Höhe des Schusses, die man zu berechnen eben nicht nöthig hat, wenn man blos die Schußweite sucht; indessen wird doch der in dieser Columme befindliche Facktor zur Berechnung des zweyten Theils AE der Schußweite in so ferne gebraucht, weil man nun in der vierten Columme des heruntersteigenden Astes so weit herunter gehen muß, bis man entweder denselben Faktor daselbst antrift, oder wenigstens denjenigen, so ihm am nechsten komt. Sodann nehme man die dabey stehende Zahl in der dritten Columme des niedersteigenden Bogens heraus und multiplicire sie mit 2, 302585$c$, so hat man das Stück der Schußweite AE, welches zu dem vorigen AF addirt, die ganze Schußweite FE oder GH giebt. 1. Fig.

V. Hat

V. Hat man nach der dritten Regel den gesuchten Faktor in dem niedersteigenden Bogen nicht selbst gefunden, sondern nur die nechste Zahl genommen, so hat man die Schußweite noch nicht ganz genau, sondern man muß noch eine Verbesserung anbringen, davon sich am deutlichsten in der Anwendung auf die beyzufügende Exempel wird reden lassen.

## Exempel.

Im ersten Exempel der vorigen Aufgabe wurde $n = 1,822067$ gefunden, und die Bahn der Kugel gehörte zur XII. Hauptart. Also findet man nach der ersten Regel

$$l\tfrac{1}{2}c = 3,1046919$$
$$l4g = 1,7958800$$
$$l2cg = 4,9005719$$
Man dividire mit 2
$$\text{so ist } l\sqrt{2cg} = 2,4502859$$
$$l1,7222525 = 0,2360968$$
$$2,6863827$$

die zugehörige Zahl ist 485, 716418, welches dieselbe Zahl ist, die im ersten Exempel der vorigen Aufgabe die erste Geschwindigkeit der Bombe ausdruckte.

Nun hat man schon $l\tfrac{1}{2}c = 3,1046919$
Man addire $l2 = 0,3010300$
so ist $lc = 3,4057219$
Weiter ist $l2,302585 = 0,3622156$
also ist $l2,302585c = 3,7679375$
Hiezu addire man weiter $l0,3651912 = 6,5625207$
$10,3304582$

Die Charakteristik des $l0,3651912$ ist wegen der Bequemlichkeit im rechnen so genommen, als wenn diese Zahl eine ganze Zahl wäre. Man muß also die Charakteristik der gefundenen Summe wieder um 7 vermindern, so hat man $l\,AF = 3,3304582$, und $AF = 2140,219$ Rheinl. Schuh. Nach der vierten Regel sucht man nun die

Zahl

Zahl 0, 2108126 in der vierten Columme des niedersteigenden Bogens, und weil man sie in derselben nicht genau antrift, so nimt man die nechstkleinere Zahl 0, 2075404 vor der Hand als die richtige an, und schreibt die dabey stehende Zahl 0, 2783021 der dritten Columme aus. Rechnet darauf zusammen

$$l\,2,3025850 = 3,7679375$$
$$l\,0,2783021 = 6,4445164$$

so ist die Summe 10, 2124539

und folglich AE = 1631 Rheinl. Schuh. Diese Zahl aber ist noch zu klein, und um sie richtiger zu finden, verfährt man so:

Von 0, 2108126
subtr. man 0, 2075404
so ist die Diff. 0, 0032722
Von der nechstgrössern Höhe 0, 2821389
die nechstkleinere subtr. 0, 2075404
giebt die Diff. 0, 0745985

Die Differenz zwischen den respondirenden Weiten 0, 3171356 − 0, 2783021 ist = 0, 0388335. Deswegen schliest man 745985 : 32722 beynahe = 0, 0388335 : vierten Zahl. Nun ist

$$l\,32722 = 4,5148398$$
$$l\,388335 = 5,5892065$$

10, 1040463

$$l\,745985 = 5,8727301$$

4, 2313164

Hiezu add. $l\,2,3025850 = 3,7679375$

7, 9992537 − 7

die zugehörige Zahl 9, 98283 wird zu dem vorigen Werth von AE, und sodann die Summe zu AF addirt, so ist die Schußweite = 3781 Rheinl. Schuh.

§. 27.

## III. Aufgabe.

Eben die Stücke, wie in der vorigen Aufgabe sind bekant, man hat aber nach der I. Aufgabe befunden, daß die Bahn, in welcher die Kugel fortgehet, zu keiner von den XVIII. Hauptarten gehöre: es soll auch in diesem Fall die Schusweite gesucht werden, wobey die Voraussetzung noch stehen bleibt, daß der Schus auf ebene Felde geschehen sey.

## Regeln.

I) Bey hohen Bogenschüssen mit schweren Kugeln und schwachen Ladungen, aus kurzen Stücken, welche Umstände beym Bombenwerfen statt haben, wird der Erhöhungswinkel merklich kleiner seyn, als der Asymtoten-Winkel. Denn es ist bekant, daß unter diesen Umständen die erste der Kugel mitgetheilte Geschwindigkeit nicht sehr gros sey. Weil nun der Ausdruck $\frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b} + B$ den Werth von $n$ bestimt, und $b$ wie vorausgesetzt wird, nicht sehr gros ist, im Gegentheil aber $\beta$ und $c$ eine beträchtliche Grösse haben; so wird die Differenz $\frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b}$, um welche $n$ grösser ist als B, ziemlich beträchtlich, und folglich $\gamma$ merklich grösser, als $\beta$ seyn. In diesem Fall kan man auf folgende Art verfahren. Man berechnet, wie gros die Schusweite seyn würde, so wohl, wann der Asymtotenwinkel den nechst grössern als auch, wenn er den nechstkleinern Werth hätte, und nimt zwischen beyden ein proportionirliches Mittel.

II) Bey starken Ladungen aber und langen Stücken wird der Erhöhungswinkel dem Asymtotenwinkel der Bahn der Kugel sehr nahe kommen, wie die im vorigen §. gegebenen Exempel beweisen. In diesem Fall wird die Näherung der vor. Regel nicht füglich angebracht werden können: es wäre dann, daß man für die Asymtotenwinkel wenigstens von $2\frac{1}{2}$ zu $2\frac{1}{2}$ Graden die Tabellen berechnet, und sich im aufstei-

aufsteigenden Bogen dem Asymtotenwinkel bis auf einige Minuten genähert hätte. Meine Tafeln sind also in dieser Absicht noch nicht vollständig genug, wie ich sie denn schon im 24sten §. für solche erklärt habe, denen die Vollständigkeit noch mangelt. So lange man also keine vollständigere Tafeln hat, mus man in diesem Fall die Schusweite blos nach der Theorie berechnen. Die Näherung der vorigen Regel läßt sich aus verschiedenen Ursachen hier nicht anbringen. Es gehören nemlich alle Kanonenschüsse hieher, und dies sind in den meisten Fällen entweder horizontale, oder wenig erhöhete Schüsse. Bey voller Ladung erhält aber die Kugel wenigstens eine dreymahl so grosse, und selbst bey den Ricochet-Schüssen eine doppelt so grosse Geschwindigkeit, als die Mörser bey der gewöhnlichen Ladung den Bomben mittheilen; auch sind die Kugeln lange so schwer nicht, als die Bomben. Alle diese Umstände müssen den Werth von $\frac{\frac{1}{2} c \sec \beta^2}{b}$ sehr vermindern. Weil nun $\beta$ selbst nur klein ist, so wird die Bahn der Kugel zu den ersten Arten gehören, und die für diese Arten berechneten Tabellen beweisen es, daß die Differenzen der Schusweiten sehr geschwinde wachsen, wenn der Winkel $\gamma$ sich vermindert, und deswegen würde die Näherung nach einer simplen Regel Detri hier gar zu fehlerhaft seyn. Hiezu komt noch dies, daß man in diesen Fällen nicht einmahl aus zweyen auf einander folgenden Tabellen für einerley Erhöhungswinkel die Schusweite wird berechnen können, weil die Differenzen des Winkels $\gamma$ von $5^\circ$ in dieser Absicht viel zu gros sind, und man in der vorhergehenden Tafel denselben Erhöhungswinkel nicht antreffen wird. So fallen die Bahnen der Kanonen-Kugel des IV. und V. Exempels der I. Aufgabe beyde zwischen der X. und XI. Hauptart. Aber der Erhöhungswinkel von $45^\circ$ konte in der X. Tafel nicht statt finden, weil es der Asymtotenwinkel selbst ist. Woraus von selbst erhellet, daß die I. Regel hier gar nicht angebracht werden könne.

## I. Exempel.

Wenn eine Bombe aus einem 12zolligen französischen Mörser mit der Ladung von 5 ℔ Pulver geworfen wird; so beträgt ihre erste Geschwindigkeit nach einer mittlern Zahl 400 R. Fus. Nun soll

man die Weite des Wurfs suchen, und zwar auf ebenem Felde bey der Erhöhung von 15°. In dieser Absicht suche man zuforderst nach uach der I. Aufgabe, was die Bombe für einen Weg nehmen werde. Nun ist der Kaliber des Mörsers 12 Pariser Zoll. Vermindert man ihn in dem Verhältnis von 1034 : 1000 so hat man den Kaliber der Bombe, und weil das Verhältnis des Pariser Maasses gegen das Rheinländische = 1035 : 1000 ist, so wird der Kaliber der Bombe grade 1 Rheinl. Fus seyn. Hieraus findet man nach den bekanten Regeln ihr Gewicht von 138 ℔. Und wenn ein Cubik-Fus Wasser Rheinländisch Maas 64 ℔ wiegt, so wird $e^3 = \frac{138}{64}$ Cub. Fus,

und $c = \frac{707 \times 138}{64}$. Also $lc = 3,1831185$, $l\frac{1}{2}c = 2,8820885$.

Weiter ist $b = 400$ R. F. und also giebt die Rechnung

$$\begin{array}{rl|rl} lb = & 2,6020600 & l\frac{1}{2}c = & 2,8820885 \\ lb^2 = & 5,2041200 & l\,sec\,\beta^2 = & 20,0301124 \\ l4g = & 1,7958800 & l\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2 = & 22,9122009 \\ \hline lb = & 3,4082400 & lb = & 3,4082400 \\ \cline{3-4} & & l\frac{\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2}{b} = & 19,5039609 - 20 \end{array}$$

Dies giebt $\frac{\frac{1}{2}c\,sec\,\beta^2}{b} = 0,3191251$

Da nun $B = 0,2711218$

so ist $n = 0,5902469$

Woraus der Asymtotenwinkel 29° 20′ gefunden wird, so daß die Bahn der Bombe zwischen der VI. und VII. Hauptart fält. Man suche also die Weite des Wurfs sowohl, wenn die Bahn zur VII, als auch wenn sie zur VI. Hauptart gehörte. In beyden Tafeln findet man den Erhöhungswinkel von 15° nicht, und man mus zu den Zahlen, welche in diesen Tafeln die Weite uud Höhe des Wurfs im aufsteigenden Bogen für den Erhöhungswinkel von 12° ausdrücken, $\frac{3}{4}$ der Differenz derselben von der nechstfolgenden addiren, so hat man die

die Weite und Höhe für den Winkel von 15°, wenn die Multiplication mit 2, 302585 $c$ geschehen ist. Es wird aber gefunden

aus der VII. Tafel.

$l\,2,302585\,c = 3,5453483$
$l\,0,2553282 = 6,4070987$
$l\,\mathrm{AF} = 9,9524470 - 7$
AF = 896 R. Fus
$l\,2,302585\,c = 3,5453483$
$l\,0,2119310 = 6,3261944$
$l\,\mathrm{AE} = 9,8715427 - 7$
AE = 743 R. Fus
Schusweite 1639 R. Fus.

aus der VI. Tafel.

$l\,2,302585\,c = 3,5453483$
$l\,0,3585043 = 6,5544942$
$l\,\mathrm{AF} = 10,0998341 - 7$
AF = 1258 R. Schuh
$l\,2,302585\,c = 3,5453483$
$l\,0,2802914 = 6,4476098$
$l\,\mathrm{AE} = 9,9929581 - 7$
AE = 984 R. Schuh
Schusweite 2242 R. Schuh

Die Differenz beyder Schusweiten ist 603 Fus für die Differenz des Asymtotenwinkels von 5° oder 300′. Um soviel nemlich wächst die Schusweite, wenn der Asymtotenwinkel 5° abnimt. Der gefundene Asymtotenwinkel ist 29° 20′, und also 40′ kleiner als 30°. Deswegen kan man nach der Regel Detri schliessen 300 : 40 = 603 zur vierten Zahl, welche man zur kleinern gefundenen Schusweite noch addiren mus; welches also 80 Fus ausmachen, so daß die berichtigte Schusweite 1719 Rheinl. Fus beträgt.

## II. Exempel.

Wenn eben die Bombe aus demselben Mörser und mit derselben Ladung unter einem Winkel von 45° geworfen wird, und man sucht nun die Schusweite, so giebt die Rechnung

$l\,\tfrac{1}{2}c = 2,8820885$
$l\,\sec\beta^2 = 20,3010300$
$23,1831185$
$l\,b = 3,4082400$
$l\,\dfrac{\tfrac{1}{2}c\sec\beta^2}{b} = 19,7748785$

Also $\dfrac{\tfrac{1}{2}b\sec\beta^2}{b} = 0,5954955$
$B = 1,1477934$
Also $n = 1,7432889$
und $\gamma = 54°\,7'$. Dies giebt

Aus der XI. Tafel.

$l\,2{,}302585\,c = 3{,}5453483$
$l\,0{,}5826493 = 6{,}7654075$

$l\,AF = 10{,}3107558 - 7$
AF = 2045 Rh. Fus

$l\,2{,}302585\,c = 3{,}5453483$
$l\,0{,}4013354 = 6{,}6035075$

$10{,}1488558 - 7$
AE = 1409 Rh. Fus

grössere Schusw. 3454 Rh. Fus

Aus der XII. Tafel.

$l\,2{,}302585\,c = 3{,}5453483$
$l\,0{,}3651912 = 6{,}5625208$

$l\,AF = 10{,}1078691$
AF = 1282 Rh. Fus

$l\,2{,}302585\,c = 3{,}5453483$
$l\,0{,}3154325 = 6{,}4989064$

$l\,AE = 10{,}0442547$
AE = 1107 Rh. Fus

kleinere Schusw. 2389 Rh. Fus.

Die Differenz ist 1065 Fus, und wenn man sie nach dem Verhältnis 300 : 53 vermindert, so erhält man 188 Fus, welche zu 2389 Fus addirt die berichtigte Schusweite von 2577 Rheinl. Fus geben.

§. 28.

Diese beyden lezten Exempel werden dazu dienen die bisherige Theorie einigermassen mit dem Erfolg zu vergleichen, um zu erfahren, wie weit sie sich der Wahrheit nähere. Hr. Struensee hat im 272. §. seiner Artillerie die vom Belidor angestellten Erfahrungen, wie weit die Bomben aus den Mörsern getrieben werden, angeführet, weil er sie unter allen für die richtigsten hält. Vermöge derselben sezt Belidor feste, ein 12zolliger Mörser mit einer cylindrischen Kammer treibe die Bombe, bey der Erhöhung von 45° und mit einer Ladung von 5 ℔, 3300 Schuh weit. Im II. Exempel des vor. §. sind aus der Theorie für diese Schusweite 2577 Rh. Fus gefunden, welche nur 2490 französische Fus ausmachen, dergleichen Belidor nach aller Vermuthung bey seiner Ausmessung gebraucht hat. Also scheint es dem ersten Ansehen nach, daß die Theorie sehr weit von der Erfahrung abweiche, und daß sie die Schusweite der Bombe wenigstens 800 französische Fus zu klein gebe. Allein eine genauere Prüfung wird die Theorie leicht retten; der Fehler ist vielmehr den Belidorischen Voraussetzungen beyzumessen. Es hat nemlich Belidor bey seinen Probeschüssen die Mörser nicht würklich auf 45° gestellt gehabt, sondern auf 15°. Wäre die Bahn der Bombe eine Parabel, oder wiche sie so wenig davon ab, daß der Unterscheid in der Ausübung nicht merklich bliebe, wie Hr. Beli-

dor

dor voraussetzt; so würde die Bombe in der Erhöhung von 45° grade noch einmahl so weit gehen, als in der Erhöhung von 15°, weil die Schusweiten sich alsdann wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel verhalten müsten. Hr. Belidor hat also eigentlich nur die Schusweite für die Erhöhung von 15° würklich gemessen, die gefundene Weite verdoppelt, und diese doppelte Zahl für die Schusweite bey der Erhöhung von 45° ausgegeben, welche überdem von ihm nach seiner Theorie für die gröste Schusweite gehalten wird. Seine Erfahrungen beweisen also nichts weiter, als daß die Bombe in der Erhöhnng von 15° auf die Helfte derjenigen Entfernung getrieben werde, die er in seiner vom Hrn. Struensee mit eingerückten Tabelle für die gröste ausgiebt. In unserm Exempel wird also die Bombe vermöge der Belidorischen Versuche in der Erhöhung von 15° auf 1650 französische Fus weit getrieben. Nach unsrer Theorie sind für diesen Erhöhungswinkel 1719 Rheinl. Schuh gefunden, welche 1660 französische Fus ausmachen. Die eigentliche Abweichung der Theorie von dem Belidorischen Versuch beträgt also in diesem Exempel nur 10 französische Schuh, welche nach der Theorie zuviel herauskommen. Das ist alles was man erwarten kan. Es würde gar keine Differenz mehr gefunden werden, wenn man alle und jede bey solchen Versuchen eintretende Umstände ganz genau in Betrachtung ziehen könte. Da dies aber nicht geschehen kan, so mus man zufrieden seyn, wenn der Erfolg mit der Theorie bis auf eine so geringe Abweichung übereinstimmet, darauf es in der Ausübung gar nicht ankomt. Und ich bin gewis versichert, daß ich alle Bombardier mir sehr verbindlich machen würde, wenn ich die Regeln ihrer Kunst so weit bringen könte, daß sie beym Bombenwerfen allemahl bis auf einen Unterscheid von 10 Fus sicher treffen müsten.

§. 29.

Es ist mir unangenehm, daß ich genöthiget bin, diese Untersuchung jetzt abzubrechen. Ich würde mit Vergnügen die übrigen Belidorischen Versuche ebenfals prüfen, und ich zweifle nicht, daß die Theorie eben so vortreflich damit übereinstimmen werde, als mit dem vorigen. Allein meine Zeit und übrige Umstände erlauben es mir jetzt nicht, diese Untersuchung vorzunehmen. Ich bin nun einmahl ein Autor geworden, und habe als Autor versprochen, mehr zu schreiben. Das Vergnügen, mehrmahl als Autor aufzutreten, wird mich schon antreiben, mein Versprechen zu erfüllen. Ich scherze zwar. Aber im Ernst, es ist mir nicht recht gelegen, daß meine Tafeln nicht vollständig genug sind, die Schusweite der Kanonen- und Musketen-Kugeln zu berechnen, da die

Theorie

Theorie an sich selbst algemein und gleich hinreichend ist, dem Kanonier so gut als dem Bombardier sichere Regeln zu geben. Darum werde ich so lange misvergnügt seyn, bis ich diesen Mangel ersetzt habe. Herr Euler hat zwar das Verdienst allein, die theoretische Auflösung unsrer Hauptaufgabe durch ihm eigene Kunstgriffe in der Integralrechnung zu einer solchen Vollkommenheit gebracht zu haben, daß man die Formuln in der Ausübung ohne grosse Schwierigkeit nutzen kan; da im Gegentheil andre Geometer zwar eben das Problem aufgelöst haben, aber auf eine solche Art, daß man davon keine Vortheile in der Ausübung bisher erwarten können. Mir bleibt nur das kleine Verdienst dabey übrig, daß ich so viele Gedult besitze, eine etwas langweilige Rechnung zu unternehmen. Indessen kan ich mir doch auch darauf ein wenig zu gute thun, da sich mancher vor dergleichen Arbeiten scheuet. Der Artillerist kan es nicht verlangen, daß er seine Kunst ohne Mühe und Fleis zur Vollkommenheit bringe. Die Astronomen gehen allen denjenigen, welche die Mathematische Theorie in der Ausübung nutzen wollen, darin mit dem besten Exempel vor, daß sie die verwickeltsten Rechnungen nicht scheuen. Von welcher Wissenschaft aber kan man auch wohl sagen, daß sie in ihrer Art zu einer grössern Vollkommenheit gebracht sey, als eben diese, sowohl was die Theorie als Ausübung betrift. Eben die Gesetze, nach welchen sich die grossen Weltkörper drehen, schreiben auch den Bomben und Kugeln die Bahn vor, darin sie fortgehen müssen. Ich habe also guten Muth, die Artillerie werde noch einmahl zu einer ähnlichen Vollkommenheit mit der Astronomie gebracht werden, wenn man nur keinen Fleis und keine Mühe sparet, und dem lobenswürdigen Exempel der Astronomen nachahmet. Da Herr Belidor selbst ein Theoreticus war, so war es ihm vermuthlich nicht unbekant, daß die Theorie von der Bahn der Kugeln, welche Blondel in seiner Art de jetter les bombes ausgeführet hat, nicht bestehen könne, und selbst seine Versuche musten ihn davon überzeugen. Newton und Hugen hatten im vorigen Jahrhundert schon bewiesen, daß die Abweichung dieser Theorie von der Wahrheit sehr beträchtlich seyn müsse, und Joh. Bernoulli sowohl als Herman hatten in den Jahren 1716 bis 1720 schon gelehrt, sowohl wie die algebraische Gleichung gefunden werden müsse, welche die Bahn der Kugel ausdrückt, als auch, wie die Linie geometrisch verzeichnet werden könne. Dies alles aber konte den Hrn. Belidor noch nicht bewegen, in seinem zu Paris 1731 herausgegebenen Bombardier francois die Blondelsche Theorie zu verlassen. Auch die Regel, worauf er doch am festesten bestehet, fält ganz weg, daß wenigstens die Schusweiten sich beynahe so verhalten, als wenn die Bahn der Kugeln eine Parabel wäre, wenn sie gleich an und für sich selbst wegen des Wiederstandes der Luft so gros nicht gefunden würden, als ohne diesem Wiederstand geschehen müste. Wie höchst irrig dieses sey, hat Hr. Robin überzeugend dargethan, und daß es selbst beym Bombenwerfen noch höchst unrichtig sey, wobey übrigens die Abweichung noch die geringste ist, beweist der vor. §. zur Genüge, indem die dortige Differenz von 800 Fus zuviel bey Erhöhung des Mörsers von 45° eben von der Unrichtigkeit dieser Regel herrühret. Doch ich mache es wie manche Redner, wenn sie zum Ende eilen, so kommen sie wieder in den Text hinein. Ich mus aber hiemit schliessen.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

X I.92

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav,

Henning Friedrichs, des H. Römischen Reichs Grafen von Graeveniz [et]c. [et]c. Sr. Königl. Majestät von Groß-Brittannien und Churfürstl. Durchl. zu Braunschweig-Lüneburg bestallten Capitain-Lieutenants beym Hochl. von Reedenschen Infanterie-Regiment, Akademische Abhandlung von der Bahn der Geschüzkugeln nebst praktischen Tabellen und Regeln die Schußweiten zu finden. Auf der Herzogl. Mecklenburgischen Friedrichs-Universität zu Bü

Rostock [1764]

4 App.mil. 41
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10220901-6
VD18 14307235